解　説

古典解析学における補間問題と Most Powerful Unfalsified Model（MPUM）

金子　修*・Paolo Rapisarda†

1. はじめに

最初に本解説の背景となる以下の問題を与えよう．N 組の複素数対 (λ_i, w_i), $i=1,\cdots,N$ が与えられ，すべての λ_i は相異なり複素右開半平面（開単位円外）のみに存在し，$|w_i|<1$ と仮定する．そこで，複素右開半平面（開単位円外，同順）において解析的な関数 f で，$\|f\|_{\mathcal{H}_\infty}<1$ および $f(\lambda_i)=w_i$, $i=1,\cdots,N$ となるような関数が存在するか否かを調べ，もし存在するならばそのような f を求める，という問題である．これは，20 世紀初頭に Nevanlinna[18] と Pick[19] により定式化された Nevanlinna-Pick の補間問題（以降，NP 補間問題とよぶ）であり，古典解析学を中心とした数学の分野で脈々と研究が進められ新たな成果が着実に積み重ねられている([3] など)．一方で，受動素子による正実回路網の構成条件と NP 補間問題との関連が明らかにされたことや [26]，80 年代初頭より急速に進化を遂げてきたロバスト制御，ことに $\mathcal{H}_\infty$ 制御におけるロバスト安定化器の構成問題が NP 補間問題に帰着されるという重要かつ興味深い結果が [13] で示されたことを契機として，回路理論やシステム・制御理論の分野においても本質的な役割を担う形で展開されてきた [14,15,25]．さらに，実現問題やスペクトル分解 [1,9] を中心としたシステム理論，ノルム制約つきモデル集合のためのシステム同定 [6]，制御器の次数制約を設けた感度整形問題 [4] など，現在でもさまざまな研究が続けられている．

補間問題とは，関数がとりうる値の組（補間データ）が既知のもとで，それらから未知の関数を決める問題である．したがって，粗い言い方ではあるが，冒頭の問題において与えるデータ (λ_i, w_i) をモード λ_i でのシステムがとりうる入出力信号比 w_i とすれば，それらを補間する関数 f を求めるということは，そのような入出力信号をとりうる伝達関数を求める問題として置き換えられる．このような問題に取り組むために，たとえば，軌道の性質と対応する数式モデルの性質を結びつけるような同型写像の存在などのように，システムの軌道と数式モデルとの関係を見通しよく対応付けるような代数的側面を色濃く反映したアプローチも一つの強力な方法であろう．また，補間問題の可解条件は，求めるべき関数よりも与える補間データの性質によって議論される方が自然である．よって，システムがとりうる軌道に基づくようなアプローチが適しているとも考えられる．

これらより，システムの軌道に着目し，かつ代数的特徴に根強く立脚したシステム理論であるビヘイビアアプローチ [8,23,24] により補間理論を考えることで，従来の結果を違った側面から眺め，そして，今まで見えなかった理論的に意義のある性質を整然とした形でとらえられることが期待できる．さらに，従来の結果をまったく独立に導出できるならば，ビヘイビアアプローチの自己完結性を示すという意味で理論的に興味深い．

ところで，データまたは軌道に適合する数式モデルは一般には無数に存在する．その中で理論的に興味深いものの一つは，データの情報を最も忠実に反映しているモデルであろう．そのようなモデルの解集合はデータに最も近いということから，Most Powerful Unfalsified Model（以降，MPUM とよぶ）とよばれている [2,24]．とくにビヘイビアアプローチでは数式モデルとデータ（軌道）が表裏一体の双対的な立場でとらえられるので，これらの同型的な関係を整然と反映した形で MPUM を構築することができる．また，軌道を表現する式の集合の包含関係が，軌道集合の包含関係では逆転することを考えれば，MPUM から（粗くいえば式を減らすことで），データ以外の別軌道もとりうる数式モデルを表現できる．つまり，MPUM は，それから用途に応じた他の数式モデルも生成できるという意味でも重要である．

以上のことから，本稿では古典解析学における補間問題をビヘイビアアプローチの観点から取り扱い，MPUM と補間問題との関連に力点をおいて解説を行う．とくに，近年，MPUM がノルム条件と解析条件を満たすように構成する問題が，冒頭の補間問題の拡張として定式化できることに着目することで，いくつかの理論的成果が得られている [10–12,20]．これらの研究成果や関連研究をベースとして，(1) 従来の補間問題との関連性，(2) 新たに見いだされた可解条件，(3) 通常知られている可解条件も MPUM の枠組みで自己完結に証明できる点などを中心に，補間問題において MPUM が本質的に果たす興

* 大阪大学 大学院基礎工学研究科
† サウサンプトン大学 コンピュータ・電気科学科

Key Words: interpolation problem, linear systems, most powerful unfalsified model (MPUM), exact modeling, behavioral approach.

味深い役割に絡めながら解説を行う．

本解説の構成は以下のとおりである．まず，**2.** でMPUMの考え方とその構成方法を述べる．**3.** でNP補間問題がMPUMを用いてどのように解かれるかについて述べ，NP補間問題において解析的な領域を拡張した高木補間問題とMPUMの結果についても触れる．**4.** では，有限個のインパルス系列からノルム条件を課した安定な関数を実現するCarathéodory Fejérの補間問題（以降，CF補間問題とよぶ）について概説する．なお，証明などは参考文献[10–12,20]に詳細があるが，記述は可能な限り本解説のみで自己完結になるようにつとめた．

[表記]: 整数，実数，複素数の集合をおのおの$\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$で表記する．非負（非正）の整数を$\mathbb{Z}_+(\mathbb{Z}_-$, 同順)で表記する．正の整数$N$に対し集合$\underline{N}:=\{1,\cdots,N\}$を準備しておく．複素数$a\in\mathbb{C}$の共役を$\bar{a}$で表記する．$n$次元の実数ベクトルの集合を$\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $m\times n$の実数行列の集合を$\mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$でおのおの表記する．変数$\xi$をもつ実係数多項式の集合を$\mathbb{R}[\xi]$で表記し，サイズが$n\times m$の行列の場合には$\mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}[\xi]$で表記する．これらの集合が複素数や複素係数の場合には$\mathbb{C}^{\mathrm{n}}$や$\mathbb{C}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$，および$\mathbb{C}[\xi]$, $\mathbb{C}^{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}[\xi]$のように表記する．なお，文脈上明らかなときには変数を省略して表記する．$R(\xi)\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}[\xi]$に対し，$R^*(\xi):=R^{\mathrm{T}}(-\xi)\in\mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}[\xi]$なる表記を定義しておく．もし，$R(\xi)\in\mathbb{C}^{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}[\xi]$の場合には$R^*(\xi):=\bar{R}^{\mathrm{T}}(-\xi)$とする．$R(\xi)\in\mathbb{R}[\xi]$に対し，その最高次数を$\deg(R)$と表記する．$R(\xi)\in\mathbb{R}[\xi]$に対し，$R(\xi)=:\sum_{i=0}^{n}R_i\xi^i$であるとき，$R(\xi)^r:=\sum_{i=0}^{n}R_{n-i}\xi^i$と表記する．無限回微分可能なサイズが$q$の実数（複素数）ベクトル値関数の集合を$\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathrm{q}})$ ($\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}^{\mathrm{q}})$, 同順）で表記する．$\mathcal{L}_2(\mathbb{R},\mathbb{C}^{\mathrm{q}})$を$\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}^{\mathrm{q}})$の中でコンパクトサポートをもつ関数の集合とする．また，サイズがqの離散時間時系列信号の集合を$(\mathbb{R}^{\mathrm{q}})^{\mathbb{Z}}$で表記する．非負(非正)の時間で定義される場合には，$(\mathbb{R}^{\mathrm{q}})^{\mathbb{Z}_+}$ ($(\mathbb{R}^{\mathrm{q}})^{\mathbb{Z}_-}$, 同順）を用いる．複素平面上の開右（左）半平面を$\mathbb{C}_+$ ($\mathbb{C}_-$, 同順）で表記する．多項式行列が安定であるとは，正則かつ行列式の根が$\mathbb{C}_-$（離散時間の場合には複素開単位円内）に存在する場合をいう．$\mathbb{R}^{\mathrm{q}}$または$\mathbb{C}^{\mathrm{q}}$の部分空間$\mathcal{V}$に対し，その次元を$\dim(\mathcal{V})$で表記する．線形作用素Vの零化空間を$\mathrm{Ker}(V)$で表記し，像空間を$\mathrm{Im}(V)$で表記する．$\|\bullet\|_2$, $\|\bullet\|_{\mathcal{H}_\infty}$, $\|\bullet\|_{\mathcal{H}_\infty^\perp}$, $\|\bullet\|_{\mathcal{L}_\infty}$を，おのおの2ノルム，$\mathcal{H}_\infty$ノルム，$\mathcal{H}_\infty^\perp$ノルム（$\mathcal{H}_\infty^\perp$は$\mathcal{L}_\infty$における$\mathcal{H}_\infty$の直交補空間とする），$\mathcal{L}_\infty$ノルムとする．

2. MPUM

2.1 ビヘイビアアプローチ

まず，本解説ではシステムは線形時不変であると仮定する．また，システムがとりうる軌道の集合を$\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathrm{q}})$と表記する．このとき，$w\in\mathfrak{B}$は，ある適切な多項式行列$\in\mathbb{R}^{\mathrm{p}\times\mathrm{q}}[\xi](p\leq q)$を用いて

$$R\left(\frac{d}{dt}\right)w=0 \tag{1}$$

なる微分方程式の解として表現できる．この表現をKernel表現とよぶ[24]．また，$\mathfrak{B}\subseteq(\mathbb{R}^{\mathrm{q}})^{\mathbb{Z}}$のときは定数係数差分方程式で表現される．なお，軌道の集合$\mathfrak{B}$も数あるシステムの「モデル」のうちの一つである．

線形時不変システムが自律であるとは，任意の$w\in\mathfrak{B}$における時刻0以前の挙動が0であるならば以降も0であることをいう．すなわち，入力や外生信号の介在しないシステムのことである．システムが自律であることとKernel表現を誘導する多項式行列Rが$\det(R)\neq0$となることは等価である．そして，$\deg(\det(R))$はシステムの軌道がもつ自由度と等価になる[23,24]．

Rの各行がシステムの動特性を表現する式の一部であるので，二つのビヘイビア$\mathfrak{B}_1$と$\mathfrak{B}_2\subseteq\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathrm{q}})$および対応するKernel表現(1)式を誘導する$R_1$, $R_2\in\mathbb{R}^{\bullet\times\mathrm{q}}[\xi]$を考えたとき，$\mathfrak{B}_1\subseteq\mathfrak{B}_2$であることと，$R_2$の各行を構成する多項式モジュールが$R_1$を構成する多項式モジュールの部分集合であることは等価である．

2.2 MPUMとExactモデリング

まず，データ集合

$$\mathcal{D}:=\{w_i\in\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathrm{q}}),\ i\in\underline{N}\} \tag{2}$$

が与えられたとする[1]．軌道の集合としてのモデル$\mathfrak{B}\in\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathrm{q}})$を考え，$\mathcal{D}\subseteq\mathfrak{B}$であるとき，$\mathfrak{B}$を「データを反証しない」という意味で$\mathcal{D}$に対するUnfalsified モデルとよぶ．Unfalsifiedモデルの軌道集合は$\mathcal{D}$を含む形でいくらでも大きくできるので，$\mathcal{D}$になるべく近い方が，そのデータにとって「強い」信頼度をもつモデルといえる．その意味で，$\mathcal{D}$に対する二つのUnfalsifiedモデル$\mathfrak{B}_1$と$\mathfrak{B}_2$に対し，$\mathfrak{B}_1\subseteq\mathfrak{B}_2$であるとき$\mathfrak{B}_1$は$\mathfrak{B}_2$よりPowerfulであるという．そして，$\mathcal{D}$に対するUnfalsifiedモデル$\mathfrak{B}^*$が他の任意のUnfalsifiedモデル$\mathfrak{B}'$に対して$\mathfrak{B}^*\subseteq\mathfrak{B}'$となるとき，$\mathfrak{B}^*$を$\mathcal{D}$に対するMost Powerful Unfalsified Model(MPUM)とよぶ[2,16,23,24]．

ここでデータを線形時不変システムの軌道で$\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathrm{q}})$の部分集合に限定しよう．このとき，(2)式の各元$w_i$は

$$w_i=\sum_{j=0}^{\nu_i}v_{ij}\frac{t^j}{j!}e^{\lambda_i t}\ ,\ v_{ij}\in\mathbb{C}^{\mathrm{q}}\ i\in\underline{N} \tag{3}$$

となる．この場合に，$\mathcal{D}=\mathfrak{B}^*$を満たす唯一のMPUMである$\mathfrak{B}^*$の存在がいえる[2,23,24]．つまり，データ以外の軌道とは適合することはなく，データはすでに与えられたものであるので，これは入力が介在しないことに相当する．したがって，MPUMは自律システムのモデルとなり$\mathrm{Ker}R=\mathcal{D}$となる正則な$R\in\mathbb{R}^{\mathrm{q}\times\mathrm{q}}[\xi]$が存在する．さらに，(3)式の各モード$\lambda_i$での軌道の基底となる関数が$\nu_i+1$個なので，データ$\mathcal{D}$の自由度は$\sum_{i=1}^{N}(\nu_i+1)$

[1] 一般に時系列モデリングといえば，離散時間のデータに関する主題であるが，本解説ではさらに拡大解釈して連続時間の時間信号も時系列とよぶことにする．

となり，$\deg(\det(R))=\sum_{i=1}^{N}(\nu_i+1)$ になる．

この場合の MPUM を誘導する R の逐次的な構成法をみてみよう．簡単のために，(3) 式のすべての i で $\nu_i=0$ とし，$v_i:=v_{i0}$ とおく．まず，最初に $R_0:=I_{\mathrm{q}}$ とおき，$i\geq 1$ で $R_i(\xi)=E_i(\xi)R_{i-1}(\xi)$ なる逐次的な更新式を考える．ここで，$E_i(\xi)$ は $R_{i-1}(\xi)$ で誘導される微分方程式に w_i を作用させたときの誤差軌道 $\epsilon_i=R_{i-1}(\lambda_i)v_ie^{\lambda_i t}$ のみに対する MPUM を誘導する多項式行列である．誤差軌道 ϵ_i に適合する Unfalsified モデルの一つとして

$$\frac{\varepsilon_i\varepsilon_i^{\mathrm{T}}}{\|\varepsilon_i\|_2^2}\frac{d}{dt}-\lambda_iI_q,\ \varepsilon_i:=R_{i-1}(\lambda_i)v_i \tag{4}$$

なる微分作用素の Kernel があげられられる．さらに，ϵ_i の自由度が 1 であること（$R_{i-1}(\lambda_i)v_i$ の定数倍のみ）と，$\deg(\det(\varepsilon_i\varepsilon_i^{\mathrm{T}}/\|\varepsilon_i\|_2^2\xi-\lambda_iI_q))=1$ であることから，(4) 式は ϵ_i のみに適合する MPUM でもある．よって，$E_i(\xi):=\varepsilon_i\varepsilon_i^{\mathrm{T}}/\|\varepsilon_i\|_2^2\xi-\lambda_iI_q$ とすればよい．このような操作を N まで繰り返すことで得られた多項式行列は $R_N(\xi)=\Pi_{i=1}^{N}E_i(\xi)R_0$ で表現されるが，これがすべての w_i に対する Unfalsified モデルであり，かつ w_i 以外には適合しない（$\deg(\det(R_N))=N$ になる）ことも上述の構成法から明らかであろう．したがって，R_N は $\mathcal{D}$ に対する MPUM を誘導する．以上のように逐次的に MPUM を構成する手法を Exact モデリングとよぶ [2,16,23].

3. 部分空間 NP 補間問題

3.1 問題の定式化

まず，冒頭で述べた NP 補間問題を拡張した以下の問題を考えてみよう [20].

【問題 1】 N 個の相異なる複素数 $\lambda_i\in\mathbb{C}_+$，および線形部分空間 $\mathcal{V}_i\subseteq\mathbb{C}^{\mathrm{q}}$ が対 $(\lambda_i,\mathcal{V}_i)$，$i\in\underline{N}$，として与えられたとする．さらに，$p+m=q$ となるような $p,m\in\mathbb{Z}_+$ が存在し，$\kappa_i:=\dim(\mathcal{V}_i)\leq m$ および $\{v=[v_1^{\mathrm{T}}\ v_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in\mathcal{V}_i,v_1\in\mathbb{C}^{\mathrm{m}},v_2\in\mathbb{C}^{\mathrm{p}},v\neq 0\}\Rightarrow\{\|v_1\|_2>\|v_2\|_2\}$ とする．このとき，以下の条件を満たす $U\in\mathbb{C}^{\mathrm{p}\times\mathrm{m}}[\xi]$ および $Y\in\mathbb{C}^{\mathrm{p}\times\mathrm{p}}[\xi]$ が存在する条件およびその表現を求めよ．

(i) U と Y が左既約

(ii) $\begin{bmatrix}U(\lambda_i) & -Y(\lambda_i)\end{bmatrix}v=0,\ \forall v\in\mathcal{V}_i,\ i=\underline{N}$

(iii) $\|Y^{-1}U\|_{\mathcal{H}_\infty}<1$ □

なお，条件 (i) と (iii) から Y は安定となることも要求されている．冒頭で述べた問題における有理関数を $f=u/y$ と表記し，補間条件 $f(\lambda_i)=u(\lambda_i)/y(\lambda_i)=w_i$ が

$$\begin{bmatrix}u(\lambda_i) & -y(\lambda_i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ w_i\end{bmatrix}=0$$

と書き換えられることや $1>|w_i|$ に注意すれば，冒頭の NP 補間問題も**問題 1** に含まれていることがわかる．

問題 1 では，通常のシステム制御理論のように数式モデルを信号から信号への作用素としてとらえずに，とりうる信号と数式モデルを対等な関係で，言い換えれば，軌道とそれを生成するモジュールの関係としてとらえている．そのように見方を変えることで，行列の NP 補間問題へ自然に拡張されていることがわかる．もちろん，以前にも行列 NP 補間問題は研究されていたが（[3,7,15] など），このように軌道と対応する数式を対等にみることによってもこのような一般化は可能となる．

そして，ある λ_i に対して，唯一のベクトルではなく部分空間とすることで，複数のベクトルの対応，すなわち単一のモードに対する重複データも許容している．その意味で**問題 1** を部分空間 NP 補間問題とよぶ．

3.2 双対化データと Pick 行列

問題 1 の条件 (ii) は $[U(\lambda_i)\ \ -Y(\lambda_i)]ve^{\lambda_i t}=0$ とも等価なので，$ve^{\lambda_i t}$ をデータとした MPUM と関係がありそうなことが期待できる．しかし，MPUM がデータのみに適合する自律なシステムを表現する点に対し，$[U\ \ -Y]$ は横長であり，しかも $Y^{-1}U$ と表現すること自体が入力の存在を許容しているので自律ではなく，この行列はどのようなデータに対しても MPUM とはなりえない．

ところが，(iii) のノルム条件を併用すると，この補間問題が MPUM の問題に帰着できることが以下のように，若干粗くはなるが直感的に説明できる．簡単のために $m=p=1$，$N=1$ としよう．このとき安定な関数 U/Y が $\|U/Y\|_{\mathcal{H}_\infty}<1$ を満たすということは，解析領域を反転させた (すなわち反安定な) 関数 U^*/Y^* も $\|U^*/Y^*\|_{\mathcal{H}_\infty^\perp}<1$ を満たすことも意味している（逆も同様）．ここで，U^*/Y^* と U/Y の間には，ラプラス変換が定義される時間領域が反転する，すなわち，因果関係が反転する関係が存在するので，U/Y に対して $t>0$ で $v_1e^{\lambda t}$ が入力，$v_2e^{\lambda t}$ が出力ならば，U^*/Y^* に対しては $t<0$ で $\bar{v}_1e^{-\bar{\lambda}t}$ が出力，$\bar{v}_2e^{-\bar{\lambda}t}$ が入力となる．一方，一般にモード $-\bar{\lambda}$ について U^*/Y^* に対する入力が $v_1'e^{-\bar{\lambda}t}$，出力が $v_2'e^{-\bar{\lambda}t}$ と表されるならば，周波数応答からの類推から同じモードでは入出力ゲインの比が不変であることより $\bar{v}_1/\bar{v}_2=v_2'/v_1'$，すなわち，

$$\begin{bmatrix}\bar{v}_1' & \bar{v}_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0 \tag{5}$$

なる関係を満たしている．

以上のことより，データとして $v=[v_1\ v_2]^{\mathrm{T}}$ および λ が与えられ，このデータに適合しノルム条件を満たすモデルを求めるには，このデータのみでなく，(5) 式を満たす $[v_1'\ v_2']^{\mathrm{T}}$ および $-\bar{\lambda}$ から構成される双対データに対しても同時に考えるとよさそうである．そして元のデータおよびその双対データ双方に適合するモデルは

$$\begin{bmatrix}U & -Y\\ -Y^* & U^*\end{bmatrix} \tag{6}$$

で誘導される形式をもつ Kernel 表現となることが予想される．このようにとらえると，上の行列は正則である

から，元のデータのみならず双対データまで拡張した場合のデータ集合に関するMPUMとなる．すなわち，ノルム条件のついた補間問題において，双対データまで拡張し，そのMPUMを求める立場で考えれば，問題を見通しよくとらえることができる．

さて，上記のような直感的な説明をより一般的かつ明確に定理としてまとめるために，以下の準備をおく．まず部分空間$\mathcal{V}_i$に対し，

$$\mathcal{V}_i^{\perp} := \{w \in \mathbb{C}^{\mathrm{q}} | \bar{w}^{\mathrm{T}} J v = 0 \ {}^{\forall} v \in \mathcal{V}_i\} \tag{7}$$

のような双対部分空間を導入する．ここで

$$J := \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix} \tag{8}$$

である．なお，$\mathcal{V}_i \oplus \mathcal{V}_i^{\perp} = \mathbb{C}^{\mathrm{q}}$であることも容易に示せる．そして，表記の簡単化のため，元データの集合を$\mathcal{V}_i e^{\lambda_i t}$, $i \in \underline{N}$, 双対データの集合を$\mathcal{V}_i^{\perp} e^{-\bar{\lambda}_i t}$, $i \in \underline{N}$と記述して，これらの和集合をデータ集合

$$\mathcal{D} := \bigcup_{i \in \underline{N}} \left\{ \mathcal{V}_i e^{\lambda_i t} \cup \mathcal{V}_i^{\perp} e^{-\bar{\lambda}_i t} \right\} \tag{9}$$

とする．$\mathcal{D}$を以下では双対化データとよぶことにしよう．そして，上記で述べたことから，この双対化データ$\mathcal{D}$に対するMPUMを考える．

さて，もう一つの準備としてPick行列を与える．通常のNP補間問題でも補間データを用いたPick行列が可解条件で本質的役割を果たしたが，ここでも同様に重要な役割を果たす．まず，$\mathcal{V}_i = \mathrm{Im}(V_i)$となる基底行列$V_i \in \mathbb{C}^{\mathrm{q} \times \kappa_i}$を準備する．そして，$\mathcal{V}_i e^{\lambda_i t}$, $i \in \underline{N}$に対して，サイズが$\sum_{i=1}^{N} \kappa_i \times \sum_{i=1}^{N} \kappa_i$のPick 行列を

$$T_{\{\mathcal{V}_i, i \in \underline{N}\}} := \begin{bmatrix} \dfrac{\bar{V}_1^{\mathrm{T}} J V_1}{\bar{\lambda}_1 + \lambda_1} & \cdots & \dfrac{\bar{V}_1^{\mathrm{T}} J V_N}{\bar{\lambda}_1 + \lambda_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\bar{V}_N^{\mathrm{T}} J V_1}{\bar{\lambda}_N + \lambda_1} & \cdots & \dfrac{\bar{V}_N^{\mathrm{T}} J V_N}{\bar{\lambda}_N + \lambda_N} \end{bmatrix} \tag{10}$$

として定義する．なお，$m = p = 1$および$\kappa_i = 1 (i \in \underline{N})$とすれば，冒頭で述べたよく知られているNP補間問題の可解条件を表現するために用いられるPick行列になる．$\kappa_i = 1 (i \in \underline{N})$のみを課すと，行列関数のNP補間問題（[3,15]など）で導入されたPick行列になる．

3.3 可解条件とMPUM

以上の準備のもと，**問題1**の可解条件として以下の定理が導かれる[20]．

【定理 1】 以下の三条件は等価である．

(i) Pick行列$T_{\{\mathcal{V}_i, i \in \underline{N}\}}$が正定．

(ii) $\mathcal{D}$に対するMPUMが

$$R := \begin{bmatrix} -D^* & N^* \\ Q & -P \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{\mathrm{q} \times \mathrm{q}}[\xi] \tag{11}$$

で誘導されるKernel表現をもつ．ここでRおよび，$D \in \mathbb{C}^{\mathrm{m} \times \mathrm{m}}[\xi]$, $N \in \mathbb{C}^{\mathrm{p} \times \mathrm{m}}[\xi]$, $Q \in \mathbb{C}^{\mathrm{p} \times \mathrm{m}}[\xi]$, $P \in \mathbb{C}^{\mathrm{p} \times \mathrm{p}}[\xi]$は次の性質を満たす．

a) DとPは正則

b) $QD - PN = 0$

c) Pは安定多項式行列

d) $RJR^* = R^* JR = \{\Pi_{i=1}^{N} (\xi + \bar{\lambda}_i)(-\xi + \lambda_i)\} J$

e) $\|P^{-1} Q\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1$

f) $\|N^* P^{-1}\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1$

(iii) 部分空間NP補間問題(**問題 1**)の解が存在する．□

条件(i)は，冒頭のNP補間問題の可解条件や行列版のNP補間問題の一般化になっている．ただし，これまで知られている証明とは別に，基本的な線形代数の結果を用いるのみで全く自己完結に証明が可能である．

条件(ii)がMPUMを用いた新たな可解条件であり，これは後に解の表現や逐次計算に使用される意味で実用的に重要であるだけでなく，補間理論とMPUMを結びつける意味で理論的にも大きな意義をもつ．a)とb)の条件から，(11)式は**3.2.**の(6)式で現れた形式に相当することもわかる．すなわち，部分空間NP補間問題が可解であることが，与えられたデータのみでなく双対データに対しても適合するようなMPUMの存在と等価となっている．さらに条件e)の$\|P^{-1}Q\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1$も加味すると，$\|ND^{-1}\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1$すなわち，$\|N^* D^{*-1}\|_{\mathcal{H}_\infty^{\perp}} < 1$ともなっている．これらから，$\|P^{-1}Q\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1$と$\|N^* D^{*-1}\|_{\mathcal{H}_\infty^{\perp}} < 1$が**3.2.**の$\|U/Y\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1$と$\|U^*/Y^*\|_{\mathcal{H}_\infty^{\perp}} < 1$におのおの対応するとみなすことができ，元のデータおよび双対データに適合する伝達関数がおのおのノルム条件を満足することに相当することも直感的にわかるだろう．

なお，データに対してMPUMとなることは$\mathcal{V}_i e^{\lambda_i t}$に対して適合することも意味しており，このことと条件c)とe)から(11)式の下ブロック$[Q \ -P]$から共通左因子を取り除いた残りの行列が**問題 1**の解の一つともなる．

さて，以下に**定理 1**の証明の道筋を，先述したExactモデリングによるMPUMの構成と絡めて簡潔かつ直感的に概説する．詳細は非常に長いので[20]を参照されたい．まず，MPUMの逐次的構成と関連づけるために(i)から(ii)を帰納法で示す．$j = 1$のとき，

$$R_1(\xi) := (\xi + \bar{\lambda}_1) I_{\mathrm{q}} - V_1 T_{\{\mathcal{V}_1\}}^{-1} \bar{V}_1^{\mathrm{T}} J \tag{12}$$

とおくと，これが双対化データ$\mathcal{V}_1 e^{\lambda_1 t} \cup \mathcal{V}_1^{\perp} e^{-\bar{\lambda}_1 t}$に適合することは，$R_1(d/dt) V_1 e^{\lambda_1 t} = \{(\lambda_1 + \bar{\lambda}_1) V_1 - V_1 T_{\{\mathcal{V}_1\}}^{-1} \bar{V}_1^{\mathrm{T}} J V_1\} e^{\lambda_1 t} = 0$，および$R_1(d/dt) V_1^{\perp} e^{-\bar{\lambda}_1 t} = \{(-\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_1) V_1^{\perp} - V_1 T_{\{\mathcal{V}_1\}}^{-1} \bar{V}_1^{\mathrm{T}} J V_1^{\perp}\} e^{-\bar{\lambda}_1 t} = 0$からわかり，そして$\deg(\det(R_1)) = q$なのでMPUMを誘導することがわかる．さらに，条件a)~f)も満たすことも代数計算により示せる．つぎに，帰納法の仮定として，$j \in \underline{N\text{-}1}$のときに(i)から(ii)が成立するとしよう．この仮定のもとで，$j \in \underline{N}$の場合を考えよう．$j = 1$のときの$\mathcal{V}_1 e^{\lambda_1 t} \cup \mathcal{V}_1^{\perp} e^{-\bar{\lambda}_1 t}$に

対する MPUM を誘導する R_1 が (12) 式で得られているので，これに $\mathcal{V}_i e^{\lambda_i t}$, $i \in \{2,\cdots,N\}$ を施すと誤差データ

$$R_1\left(\frac{d}{dt}\right)V_i e^{\lambda_i t} = R_1(\lambda_i)V_i e^{\lambda_i t} \neq 0\ ,\ i \in \{2,\cdots,N\}$$

が生じる．その際の誤差データを

$$\mathcal{E}_i = \mathrm{Im}(E_i) \tag{13}$$

$$E_i := R_1(\lambda_i)V_i = (\lambda_i + \bar{\lambda}_1)V_i - V_1 T_{\{\mathcal{V}_1\}}^{-1}\bar{V}_1^{\mathrm{T}} J V_i \tag{14}$$

として，$\mathcal{E}_i e^{\lambda_i t}$, $i \in \{2,\cdots,N\}$ と表そう．$\det(R_1(\xi))$ の根は λ_1 と $-\bar{\lambda}_1$ のみなので，$i \in \{2,\cdots,N\}$ で $R_1(\lambda_i)$ は正則であり，$R_1(\lambda_i)V_i$ は列フルランクかつ $\dim(\mathcal{E}_i) = \kappa_i$ となる．よって，$N-1$ 個の誤差データ $\mathcal{E}_i e^{\lambda_i t}$, $i \in \{2,\cdots,N\}$ が，最初に与えられたデータの中で $\mathcal{V}_i e^{\lambda_i t}$, $i \in \underline{N-1}$ の性質をそのまま受け継いでいることがわかる．

この誤差データ $\mathcal{E}_i e^{\lambda_i t}$, $i = \{2,\cdots,N\}$ に対して，サイズが $\sum_{i=2}^{N}\kappa_i \times \sum_{i=2}^{N}\kappa_i$ の Pick 行列 $T_{\{\mathcal{E}_i, i \in \{2,\cdots,N\}\}}$ を (10) 式と同様に求める．(14) 式より $T_{\{\mathcal{E}_i, i \in \{2,\cdots,N\}\}}$ の (k,l) に位置するブロックは

$$\begin{aligned}\frac{\bar{E}_k{}^{\mathrm{T}} J E_l}{\bar{\lambda}_k + \lambda_l} &= \frac{(\bar{\lambda}_k + \lambda_1)(\lambda_l + \bar{\lambda}_1)}{\bar{\lambda}_k + \lambda_l}\bar{V}_k^{\mathrm{T}} J V_l \\ &\quad - \bar{V}_k^{\mathrm{T}} J V_1 T_{\{\mathcal{V}_1\}}^{-1} \bar{V}_1^{\mathrm{T}} J V_l \in \mathbb{C}^{\kappa_k \times \kappa_l}\end{aligned} \tag{15}$$

となることが代数計算より示せる．一方，$T_{\{\mathcal{V}_i, i \in \underline{N}\}}$ に適切な合同変換を施すと，

$$T_{\{\mathcal{V}_i, i \in \underline{N}\}} \sim \begin{bmatrix} T_{\{\mathcal{V}_1\}} & 0 \\ 0 & T_{\{\mathcal{E}_i, i \in \{2,\cdots,N\}\}} \end{bmatrix} \tag{16}$$

となることも代数計算より示せる．条件 (i) の仮定から，Pick 行列は正定であるので右辺の各ブロック，すなわち (2,2) ブロックも正定である．ところで，帰納法の仮定から，“$\mathcal{V}_i e^{\lambda_i t}, i \in \underline{N-1}$ に対して，Pick 行列が正定ならば条件 (ii) が成立する” としている．前述したように，$N-1$ 個の誤差データ $\mathcal{E}_i e^{\lambda_i t}$, $i \in \{2,\cdots,N\}$ は $\mathcal{V}_i e^{\lambda_i t}, i \in \underline{N-1}$ の性質を受け継いでいるので，この誤差データに対しても，帰納法の「仮定」が適用できる．よって，(16) 式の (2,2) ブロックの正定性とともに $\mathcal{E}_i e^{\lambda_i t}$, $i \in \{2,\cdots,N\}$ に対しても条件 (ii) を満たす MPUM を誘導する多項式行列 $R' \in \mathbb{C}^{\mathrm{q}\times\mathrm{q}}[\xi]$ の存在がいえる．さらに，ここまでの構成法から $R^* := R'R_1$ とおけば R^* は $\mathcal{D}$ の MPUM を誘導することもわかる．なお，この R^* が条件 (ii) の a)〜f) を満たすことも示せる．かくして，MPUM とその構成法である Exact モデリング，そして Pick 行列の構造を駆使した帰納法および各種の基礎的な線形代数演算より，条件 (i) から (ii) がいえることになる．そして，MPUM と Pick 行列が補間問題の証明において果たす重要な役割についても明らかであろう．

(ii) から (iii) は先述のとおりである．(iii) から (i) については，解の存在を仮定し右既約な表現 $Y^{-1}U = ZX^{-1}$ に書き直し，$\|Y^{-1}U\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1$ の条件を

$$0 < \left(M\left(\frac{d}{dt}\right)\ell\right)^{\mathrm{T}} J M\left(\frac{d}{dt}\right)\ell \quad {}^{\forall}\ell \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R},\mathbb{C}^{\mathrm{q}}) \tag{17}$$

と書き表す．ここで，$M := [X^{\mathrm{T}}\ Z^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{\mathrm{q}\times\mathrm{m}}[\xi]$ である．そして，$\mathrm{Ker}([U\ -Y]) = \mathrm{Im}(M)$ に注意すれば，補間データに対して，ある適切な定数行列 L が存在して $M(\lambda_i)Le^{\lambda_i t} = V_i e^{\lambda_i t}$ がいえ，これらの $i \in \underline{N}$ の任意の線形結合を (17) 式に代入し，時刻 $-\infty$ から 0 まで積分し，線形結合の任意性から Pick 行列の正定性を得る．

上記の帰納法の証明で現れた構成法を用いると，$\mathcal{D}$ に対する MPUM が以下のように構成できる．

0. $R_0 = I_q$
1. $E_i := R_{i-1}(\lambda_i)V_i$
2. $R_i(\xi) := \left[(\xi + \bar{\lambda}_i)I_q - E_i T_{\{\mathcal{E}_i\}}^{-1}\bar{E}_i^{\mathrm{T}} J\right] R_{i-1}(\xi)$
3. $i = i+1$, ステップ 1 へ ($i = N$ なら終了)

このアルゴリズムを E アルゴリズムとよぶ．そして，R_N が求めるべき $\mathcal{D}$ の MPUM となる．

さて，先述したように (11) 式の下ブロック $[Q\ -P]$ から共通左因子を取り除いた行列は数ある解の一つに過ぎない．解の全体は $\mathcal{D}$ の MPUM を用いて，以下で示すパラメトリゼーションにより得られる [20]．

【定理 2】 $\mathcal{D}$ に対する MPUM(11) 式を考える．このとき，$[U\ -Y]$ が部分空間 NP 補間問題の解となる必要十分条件は，ある安定な $\Phi \in \mathbb{C}^{\mathrm{p}\times\mathrm{p}}[\xi]$ と $F \in \mathbb{C}^{\mathrm{p}\times\mathrm{p}}[\xi]$，および $\Pi \in \mathbb{C}^{\mathrm{p}\times\mathrm{m}}[\xi]$ が存在し，$\|\Phi^{-1}\Pi\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1$ および

$$F\begin{bmatrix} U & -Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi & -\Phi \end{bmatrix} R \tag{18}$$

を満たすことである．□

結局，**問題 1** の解を一般に求めるには，条件を満たす Π, Φ, F を求めればよい．なお，(18) 式から $Y^{-1}U = ((\Phi^{-1}\Pi)N^* + P)^{-1}((\Phi^{-1}\Pi)D^* + Q)$ を得るが，$\|\Phi^{-1}\Pi\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1$ の条件をかんがみれば，$Y^{-1}U$ はよく知られた NP 補間問題の解に一致することがわかる．

さて，本章の最後に解析領域を不安定なものまで拡げた高木補間問題 [22] についても，MPUM との関連する結果を紹介しておこう．問題設定は，**問題 1** と同様なデータ集合 $\mathcal{V}_i e^{\lambda_i t}$, $i \in \underline{N}$ が与えられたときに，条件 (i)〜(iii) に加え Y が ν 個の根を $\mathbb{C}_+$ にもつことをさらに課した問題となる（したがって条件 (iii) のノルムも $\mathcal{L}_\infty$ ノルムになる）．このように不安定極まで含めた補間問題は高木貞治により CF 補間問題の場合について定式化され解かれた問題であり [22]，部分空間高木補間問題とよぶ．これまで高木補間問題が対応できた範囲は，(1) スカラーの 1 入出力伝達関数の場合，および (2) 重複データがない場合（λ_i について w_i はひとつだけ）に限られていたが，最近，[11,12] においてそれらの両方とも克服しようとする結果が得られている．結果の概要はそれらに譲るが，**定理 1** において条件 (i) の Pick 行列が ν 個の負の固有値をもつことになり，条件 (ii) の c) の P が ν 個の不安定極をもつこととしておのおの拡張されている．

4. CF補間問題

4.1 問題の定式化

ここでは有限インパルス応答からの実現問題にノルム条件と安定性を課したCF補間問題[5,21]を取り扱う．ここでの問題は以下のようになる．

【問題2】 $N+1$個の実数値w_0, w_1, …, w_Nが与えられたとする．このとき，次の条件を満たす多項式Y, $U\in\mathbb{R}[\xi]$を求めよ．

(i) $U/Y=w_0+w_1\xi^{-1}+w_2\xi^{-2}+\ldots+w_N\xi^{-N}$
$+\varphi(\xi)\xi^{-(N+1)}$, ($\varphi$は適切なプロパー有理関数)

(ii) Yは安定

(iii) $\|U/Y\|_{\mathcal{H}_\infty}<1$ □

問題の質は前の二つと若干異なるが，ここでも，離散時間データにおけるMPUMからこの補間問題にアプローチすることができる[10]．

4.2 インパルスデータの双対化

3.2. で述べたことをここでは離散時間で考えよう．まず，与えられた$N+1$点のインパルスデータに対し，時間軸を非負の整数$\mathbb{Z}_+$とした以下の時系列を定義する．

$$d=\left\{\begin{bmatrix}w_N\\0\end{bmatrix},\ldots,\begin{bmatrix}w_1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}w_0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\ldots\right\}\in(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}_+} \quad (19)$$

そして，(19)式で左へ($\mathbb{Z}_+$の時間軸上で過去へ)シフトする(w_Nから順に切り落とす)オペレータσを用いて，データ集合

$$\mathcal{D}_+:=\{d_0,d_1\cdots,d_N\}\quad d_k:=\sigma^{N-k}d \quad (20)$$

を導入する．これは，実際の時系列では$t=0$でd_0, $t-1$で$d_1\cdots$, のように発生し，その各時刻ごとのインパルス応答列をデータとして格納することに相当する．

つぎに，時間と入出力関係が逆転する双対データを，非正の時間軸$\mathbb{Z}_-$で定義された

$$d'=\left\{\ldots,\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\w_0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\w_1\end{bmatrix},\ldots,\begin{bmatrix}0\\w_N\end{bmatrix}\right\}\in(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}_-} \quad (21)$$

として表現する．さらに，(21)式で右($\mathbb{Z}_-$の時間軸上で未来)へシフトする(w_Nから順に切り落とす)オペレータσ'を用いて，データ集合

$$\mathcal{D}_-:=\{d'_0,d'_1\cdots,d'_N\}\quad d'_k:={\sigma'}^{N-k}d' \quad (22)$$

を導入する．なお，上記のようなインパルス応答を切り落とすことにより，データを逐次的に構成する手法は符号理論において古くから知られている巡回符号の実現式であるBerlekamp -Massey -Seinアルゴリズム([16], [17]など)とも関連する．

4.3 Stein行列

さて，(10)式のPick行列に相当するような可解条件を判定するための行列もここでは必要であろう．まず$\mathbb{Z}_+$で二乗加算和であるような信号vとwに対して，内積$<v,w>_J:=\sum_{k=0}^{\infty}v(k)^TJw(k)$を定義する((8)式の$J$を$m=p=1$とした)．$\mathcal{D}_+$の$N+1$本のデータはこの性質を満たしている．そして以下で表される，サイズが$N+1$のエルミート行列

$$S_{\mathcal{D}_+}:=\begin{bmatrix}<d_0,d_0>_J & & <d_0,d_N>_J\\ & \ddots & \\ <d_N,d_0>_J & & <d_N,d_N>_J\end{bmatrix} \quad (23)$$

を定義する．これをStein行列とよぶことにする．

4.4 可解条件とMPUM

さて，以上の準備のもと，**問題2**の可解条件として次の定理を得る[10]．

【定理3】 以下の三条件は等価である．

(i) Stein行列$S_{\mathcal{D}_+}$が正定．

(ii) $\mathcal{D}_+$に対するMPUMが

$$R:=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}[\xi] \quad (24)$$

による$R(\sigma)$で，$\mathcal{D}_-$に対するMPUMはR^rによる$R^r(\sigma')$でおのおの誘導され，以下の条件を満たす．

a) $[r_{11}\ r_{12}]=[r_{22}\ r_{21}]^r$

b) r_{22}は安定多項式

c) $R(\xi)JR(\xi^{-1})^{\mathrm{T}}=R(\xi^{-1})^{\mathrm{T}}JR(\xi)=J$
$=R(\xi^{-1})JR(\xi)^{\mathrm{T}}=R(\xi)^{\mathrm{T}}JR(\xi^{-1})$

d) $\|r_{21}/r_{22}\|_{\mathcal{H}_\infty}<1$

e) $\|r_{12}/r_{22}\|_{\mathcal{H}_\infty}<1$

(iii) CF補間問題が可解である． □

Stein行列はよく知られたToeplitz行列とも等価であるので，条件(i)はよく知られた結果であるが，ここでは全く別の証明で示すことができる．そして，新たな条件の(ii)は，これまでにはないものであり，MPUMと関連付けている点でやはり興味深い．証明は長いので省略し[10]に譲るが，基本的方針は帰納法に基づいており，データに対するMPUMを逐次的に構築し，その際に現れた誤差軌道から構成されるStein行列と，元のデータに対するStein行列の合同関係を用いた証明である．

ただし，この(i)から(ii)の証明に現れる逐次的な構成手順は，連続時間の場合と異なるので以下で示しておこう．まず，1ステップのデータd_0とd'_0を考える．これらに対して，以下のモデル

$$R_0(\xi)=-\frac{1}{1-w_0^2}\begin{bmatrix}-1 & w_0\\ -w_0 & w_0^2\end{bmatrix}+\frac{\xi}{1-w_0^2}\begin{bmatrix}-w_0^2 & w_0\\ -w_0 & 1\end{bmatrix} \quad (25)$$

を考えよう．ここで，$\deg(\det(R_0))=1$に注意しつつ，$R_0(\sigma)$がd_0のMPUM，$R_0^r(\sigma')$がd'_0のMPUMにおのおの対応することは容易に示すことができる．さらに，条件のa)～e)まで満たすことも代数計算より導くことができる．したがって，この(25)式で表現されたモデルを1ステップのインパルス応答のモデルに用いることが

でき，これは $R_{i-1}(\sigma)(d_i)\neq 0$ としたときの誤差軌道の MPUM の構築に用いることができる．

よって，E アルゴリズムと同様に**定理 3** の条件 (ii) を満たす R は以下の逐次アルゴリズムで得られる．

0. $R_{-1}:=I$ を定義，$i=0$ とおく．
1. 誤差軌道 $\varepsilon_i:=R_{i-1}(\sigma)(d_i)$ を計算．
2. $\varepsilon_i(0)$ の第二要素を 1 に正規化する．
3. ε_i に対する 1 ステップモデルを (25) 式の形式で計算，$E_i(\xi)$ とおく．
4. $R_i(\xi):=E_i(\xi)\ R_{i-1}(\xi)$.
5. $i=i+1$ としてステップ 1 へ戻る．$i=N$ ならば $R:=R_N$ として終了．

なお，ステップ 3 で誤差データの第二要素を 1 に正規化しているのは，インパルス応答での最初の入力が 1 であることに帰着させるためであり，これにより，元のデータの性質が誤差データにも継承されることになり，帰納法の妥当性につながる．なお，このような操作が各ステップで可能であることもやはり帰納法により示せる．

さて，最後に MPUM を用いた CF の解の表現に関しては以下の定理を得る [10].

【定理 4】 **定理 3** の条件 (ii) を満たす (24) 式で与えられる R を考える．このとき，$[U\ Y]$ が CF 補間問題の解となる必要十分条件は，ある安定な $\Phi\in\mathbb{R}[\xi]$ および $\Pi\in\mathbb{R}[\xi]$ が存在し，$\|\Phi^{-1}\Pi\|_{\mathcal{H}_\infty}<1$ と $[U\ -Y]=[\Pi\ -\Phi]R$ を満たすことである．□

5. 例題

紙面の都合上，**4.** のみの簡単な例題を考えよう．三点のサンプル $w_0=2/9$, $w_1=5/27$, $w_2=-10/81$ が得られたとする．このとき，データ系列は

$$d=\left\{\begin{bmatrix}-10/81\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5/27\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2/9\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\cdots\right\}\in(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}_+}$$

となる．まず，この d から (19) 式に従って d_0, d_1, d_2 を定義し，Stein 行列を (23) のように構成すると正定であることがわかるので，**定理 3** より CF 補間問題の解が存在することがわかる．まず第 1 ステップの誤差データ

$$\varepsilon_0=R_{-1}d_0=d_0=\left\{\begin{bmatrix}2/9\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\cdots\right\}\in(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}_+}$$

に対する MPUM は (25) 式から

$$R_0(\xi)=E_0(\xi)R_{-1}=\frac{1}{77}\begin{bmatrix}81-4\xi & 18\xi-18\\-18\xi+18 & 81\xi-4\end{bmatrix}$$

となり，簡単な計算より R_0 が条件 (ii)，すなわち，d_0 および d_0' に対する MPUM を誘導し，条件 a)〜e) を満たすことが確認できる．また，$r_{21}/r_{22}=(18\xi-18)/(81\xi-4)$ のインパルス応答系列が $2/9,\cdots$ となるので，条件 (ii) の b) と d) とともに d_0 に対する CF 補間問題の解にもなる．つぎに d_1 を R_0 に施すことによる誤差データ

$$\varepsilon_1=R_0d_1=\left\{\begin{bmatrix}289/693\\241/231\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\cdots\right\}\in(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}_+}$$

に対し，この第二要素を 1 に正規化し，d_0 のときと同様に ε_1 に対する MPUM を (25) 式に従って求めると

$$E_1(\xi)=\frac{1}{439208}\begin{bmatrix}522729-83521\xi & 208947(-1+\xi)\\208947(1-\xi) & -83521+522729\xi\end{bmatrix}$$

となり，d_0 と d_1 に対する MPUM となる $R_1=E_1R_0$ は

$$\frac{1}{5704}\begin{bmatrix}6507-225\xi-578\xi^2 & 3(-482-385\xi+867\xi^2)\\-3(-867+385\xi+482\xi^2) & -578-225\xi+6507\xi^2\end{bmatrix}$$

となる．先と同様，簡単な計算より条件 (ii) を満たし，r_{21}/r_{22} のインパルス応答系列が $2/9$, $5/27,\cdots$ となることが確認できるので，ここでも d_0, d_1 に対する CF 補間問題の解になる．最後に d_2 を R_1 に適用することで得られる誤差データ ε_2 は

$$\varepsilon_2=R_1d_2=\left\{\begin{bmatrix}1831/6417\\2119/2139\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\cdots\right\}\in(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}_+}$$

となる．先と同様に第二要素を 1 に正規化し，(25) 式を適用することで ε_2 に対する MPUM を誘導する $E_2(\xi)$ が得られる（式は省略）．得られた E_2 と先ほどまでの R_1 により，d_0,d_1,d_2 に対する MPUM となる $R_2=E_2R_1$ は

$$\frac{1}{51976}\begin{bmatrix}57213+3150\xi-4725\xi^2-3662\xi^3 & 3(-4238-3765\xi+2510\xi^2+5493\xi^3)\\3(5493+2510\xi-3765\xi^2-4238\xi^3) & -3662-4725\xi+3150\xi^2+57213\xi^3\end{bmatrix}\tag{26}$$

として得られる．この R_2 も条件 (ii) を満たすこと，そして r_{21}/r_{22} のインパルス応答系列が $2/9$, $5/27$, $-10/81,\cdots$ となることが確認できる．よって，(26) 式の二行目の二つの多項式が当初与えられた三点のデータに対する CF 補間問題の解になることがわかる．

6. おわりに

本解説では，古典解析学における補間問題に MPUM という新たな観点から切り口を与え，最近の研究成果を中心に解説した．いくつかの未解決問題が残されているが，徐々に解き明かされることを期待したい．また，補間問題はいまだに人知れず横たわるシステム理論の無限の深みと広がりをもつ鉱脈の一つとして，確固たる姿勢で探求されるべき主題の一つであろう．今後，補間理論を中心とした主題が脈々と研究され続けることを期待する．

最後に，本解説の執筆の機会を与えていただいた大阪府立大学 翟 貴生先生，第一著者が日頃からお世話になっております大阪大学名誉教授 藤井隆雄先生（現在，福井工業大学教授），適切な助言をいただきました編集委員会の方々に感謝いたします．

（2006 年 11 月 6 日受付）

参考文献

[1] A. C. Antoulas and B. D. O. Anderson: On the problem of stable rational interpolation; *Line. Alg. and its Appl.*, Vol. 122/123/124, pp. 301–329 (1989)

[2] A. C. Antoulas and J. C. Willems: A behavioral approach to linear exact modeling; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 38, pp. 1776–1802 (1993)

[3] J. A. Ball, I. Gohberg and L. Rodman: *Interpolation of rational matrix functions*, Birkhäuser (1990)

[4] C. I. Byrnes, T. T. Georgiou, A. Lindquist and A. Megretski: Generalized interpolation in H-infinity with a complexity constraint; *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 358, pp. 965–987 (2006)

[5] C. Carathéodory and L. Fejér: Uber den Zusammenhang der extremen von harmonishchen Funktionen mit ihren Koeffizienten und uber den Picard-Landauchen Satz; *Rend. Circ. Mat. Palermo.*, Vol. 32, pp. 218–239 (1911)

[6] J. Chen and G. Gu: *Control-Oriented System Identification —An $\mathcal{H}_\infty$ approach*, John Willey and Sons (2000)

[7] P. Delsarte, Y. Genin and Y. Kamp: The Nevanlinna-Pick problem for matrix-valued functions; *SIAM J. on Appl. Math.*, Vol. 36, pp. 47–61 (1979)

[8] P. A. Fuhrmann: A study of behaviors; *Line. Alg. and Its Appl.*, Vol. 351/352, pp. 303–380 (2001)

[9] T. T. Georgiou and P. P. Khargonekar: Spectral factorization of matrix valued functions using interpolation theory; *IEEE Trans. on Circ. and Syst.*, Vol. 36, pp. 568–574 (1989)

[10] O. Kaneko and P. Rapisarda: Recursive exact $\mathcal{H}_\infty$ identification from impulse response measurements; *Syst. and Contr. Lett.*, Vol. 49, pp.323–334 (2003)

[11] O. Kaneko and P. Rapisarda: Stabilization with J-dissipative controllers; *Preprints of the 16th IFAC World Congress*, CD-ROM (2005)

[12] O. Kaneko and P. Rapisarda: On the Takagi interpolation problem; *Line. Alg. and its Appl.*, accepted (2007)

[13] H. Kimura: Robust stabilizability for a class of transfer functions; *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, Vol. 29, pp.788–793 (1984)

[14] 木村：ハーディ空間における補間極値問題とシステム理論；計測と制御, Vol. 24, No. 7, pp. 605–614 (1985)

[15] H. Kimura: Directional interpolation approach to $\mathcal{H}_\infty$ optimization and robust stabilization; *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, Vol. 32, pp. 1085–1093 (1987)

[16] M. Kuijper and J. C. Willems: On constructing a shortest linear recurrence relation; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 42, pp. 1554–1558 (1997)

[17] J. L. Massey: Shift-register synthesis and BCH coding; *IEEE Trans. Infor. Theory*, Vol. 15, pp. 122–127 (1969)

[18] R. Nevanlinna: Über beschränkte Funktionen, die in gegeben Punkten vorgeschrieben Werte annehmen; *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Mat. Dissertationes*, 13 (1919)

[19] G. Pick: Über die beschränkungen Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden; *Math. Ann.*, Vol. 77, pp. 7–23 (1916)

[20] P. Rapisarda and J. C. Willems: The subspace Nevanlinna interpolation problem and the most powerful unfalsified model; *Syst. and Contr. Lett.*, Vol. 32, pp. 291–300 (1997)

[21] J. Schur: Uber Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschrankt sind-I, sind-II; *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 147, pp. 205–232 (1917), Vol. 148, pp. 122–145 (1918)

[22] T. Takagi: On an algebraic problem related to an analytic theorem of Carathéodory and Fejér and on an allied theorem of Landau; *Japan J. Math.*, Vol. 1, pp. 83–93 (1924)

[23] J. C. Willems: From time series to linear systems –Part I. Finite dimensional linear time-invariant systems, –Part II. Exact modelling; *Automatica*, Vol. 22, pp. 561-580, Vol. 22, pp. 675–694 (1986)

[24] J. C. Willems: Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 36, pp. 259–294 (1991)

[25] 山本：システムと制御の数学，朝倉書店 (1998)

[26] D. C. Youla and M. Saito: Interpolation with positive-real functions; *J. of the Franklin Institute*, Vol. 284, pp. 77–108 (1967)

著者略歴

金子　修（正会員）

1969年9月30日生．1994年3月長岡技術科学大学大学院工学研究科修士課程修了．1999年3月大阪大学大学院基礎工学研究科博士後期課程満期退学．同年4月同研究科助手となり現在に至る．博士（工学）．システム理論の研究に従事．

Paolo Rapisarda

1964年12月16日生．1998年オランダ・グロニンゲン大学Ph.D取得，オランダ・マーストリヒト大学数学科 Lecturer などを経て2005年9月イギリス・サウサンプトン大学・コンピュータ電気学科 Senior Lecturer．システム理論の研究に従事．Ph.D. Systems and Control Letters の Associate Editor.