

pole elektromagnetyczne, prądy wirowe, metoda elementów skończonych, obwody magnetyczne, maszyny elektryczne

Andrzej DEMENKO*, Rafał WOJCIECHOWSKI*, Jan SYKULSKI**

SIATKOWA REPREZENTACJA OBSZARÓW PRZEWODZĄCYCH W POŁOWYCH MODELACH MASZYN ELEKTRYCZNYCH – OBSZARY JEDNOSPÓJNE

W pracy przedstawiono obwodowe, wielogłęziowe modele obszarów ze środowiskami przewodzącymi w maszynach elektrycznych. Rozpatrzono modele rezystancyjne, których równania oczkowe są równaniami metody elementów krawędziowych (MEK) dla ujęć wykorzystujących elektryczny potencjał wektorowego T i modele konduktancyjne, których równania węzłowe są równaniami metody elementów węzłowych (MEW) dla metody potencjału skalarnego V . Przedstawiono obwodową reprezentację krawędziowej wartości potencjału T dla układów z prądami przewodnictwa. Omówiono siatkowe modele układów z przewodzącymi obszarami jednorodnymi dla metody wykorzystujących skalarny potencjał elektryczny V i wektorowy potencjał magnetyczny A oraz dla sformułowań wykorzystujących wektorowy potencjał elektryczny T i potencjały magnetyczne skalarny Ω i wektorowy A .

1. WPROWADZENIE

Ostatnio w obliczeniach symulacyjnych i projektowych maszyn elektrycznych powszechnie stosuje się numeryczne metody analizy pola elektromagnetycznego. Najpopularniejsze są metody polegające na podziale rozpatrywanego obszaru na elementy skończone (MES). Nadal stosuje się także metody zastępczych obwodów (siatek) elektrycznych i magnetycznych [1]. Podstawową zaletą tych ostatnich metod jest ich pogładowość. W pracach [2,3] wykazano, że równania MES odpowiadają równaniom oczkowym bądź węzłowym ekwiwalentnych siatek magnetycznych i elektrycznych. W związku z tym również modele utworzone metodą elementów skończonych można rozpatrywać jako modele obwodowe. Liczba gałęzi tych modeli

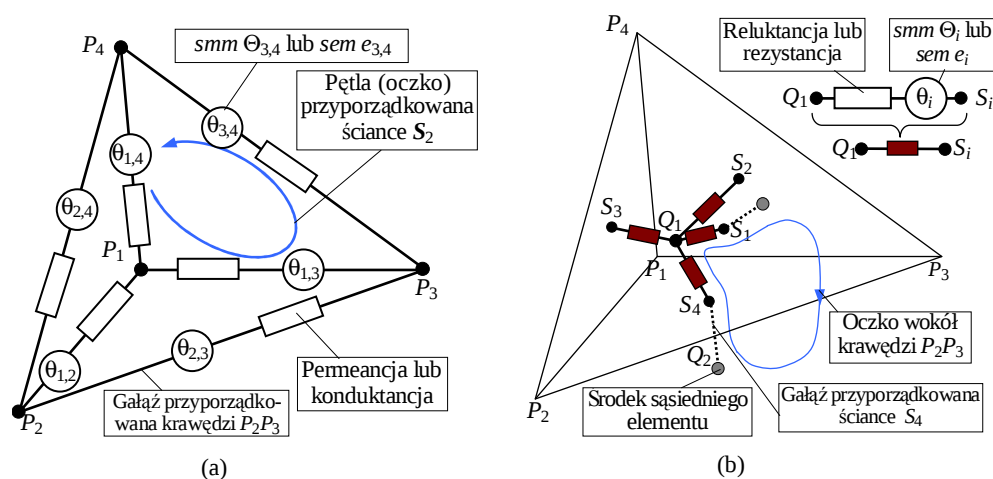
* Politechnika Poznańska, ul. Piotrowo 3a, Poznań, PL - 60 965

** University of Southampton, Southampton SO17 1BJ, UK

odpowiada liczbie krawędzi bądź liczbie ścianek siatki dyskretyzującej. Przedłożony artykuł rozwija ujęcie przedstawione w wcześniejszych pracach autorów. Koncentruje się na obwodowym (siatkowym) opisie obszarów z prądami przewodnictwa. W pierwszej części rozpatrywane są modele siatkowe obszarów przewodzących jednorodnych. Przedstawione rozważania mają ułatwić obliczanie rozplywu prądów wirowych w przewodnikach masywnych, np. w masywnych elementach rdzeni maszyn elektrycznych.

2. OBWODOWA REPREZENTACJA RÓWNAŃ MES

Z badań omówionych w pracach [2,3] wynika, że równania MES dla ujęć wykorzystujących potencjały odpowiadają równaniom dwóch typów modeli siatkowych: (a) modeli krawędziowych (SK) elektrycznych (SKE) i magnetycznych (SKM) o gałęziach przyporządkowanych krawędziom elementów oraz (b) modeli ściankowych (SS) elektrycznych (SSE) i magnetycznych (SSM) o gałęziach przyporządkowanych ściankom – łączących środki objętości sąsiadujących elementów. Na rysunku 1 pokazano krawędziowy i ściankowy model sześciościanu. Równania oczkowe siatki ściankowej (SS) odpowiadają równaniom metody elementów krawędziowych (MEK) dla sformułowań wykorzystujących potencjały wektorowe $\mathbf{A}$, $\mathbf{T}$. Krawędziowe wartości potencjałów $\mathbf{A}$, $\mathbf{T}$ reprezentują strumienie i prądy oczkowe w oczkach wokół krawędzi elementów skończonych [2,3].



Rys.1. Modele czworoscianu: (a) krawędziowy i (b) ściankowy model czworoscianu

Fig. 1. Models of a tetrahedron: (a) edge, and (b) facet

W obszarach z prądami przewodnictwa na podstawie elektrycznych modeli krawędziowych tworzy się siatkę konduktancyjną (SKK), a na podstawie elektrycznych modeli ściankowych siatkę rezystancyjną (SSR). Konduktancje SKK są obliczane na podstawie funkcji interpolacyjnych elementu krawędziowego, a rezystancje SSR na podstawie funkcji interpolacyjnych elementu ściankowego. Prądy w oczkach siatki rezystancyjnej odpowiadają krawędziowym wartościom elektrycznego potencjału wektorowego $\mathbf{T}$ dla pola przepływowego prądów (pola prądów przewodnictwa). Na przykład, prąd w pokazanym na rysunku 1b oczku wokół krawędzi P_2P_3 odpowiada wartości krawędziowej opisanej następująco

$$i_{oP_2P_3} = \int_{P_2}^{P_3} \mathbf{T} d\mathbf{l} \quad (1)$$

Prądy w oczkach siatki rezystancyjnej można rozpatrywać jako prądy wirowe wokół krawędzi elementów. Można też mówić o prądach cyrkulacyjnych Maxwella, (Maxwell circulating currents) wokół krawędzi. Liniowa gęstość tych prądów odpowiada potencjałowi wektorowemu $\mathbf{T}$. Liniowa gęstość prądów wirowych jest wektorem, bo definiując je należy podać kierunek i zwrot osi "wiru prądowego".

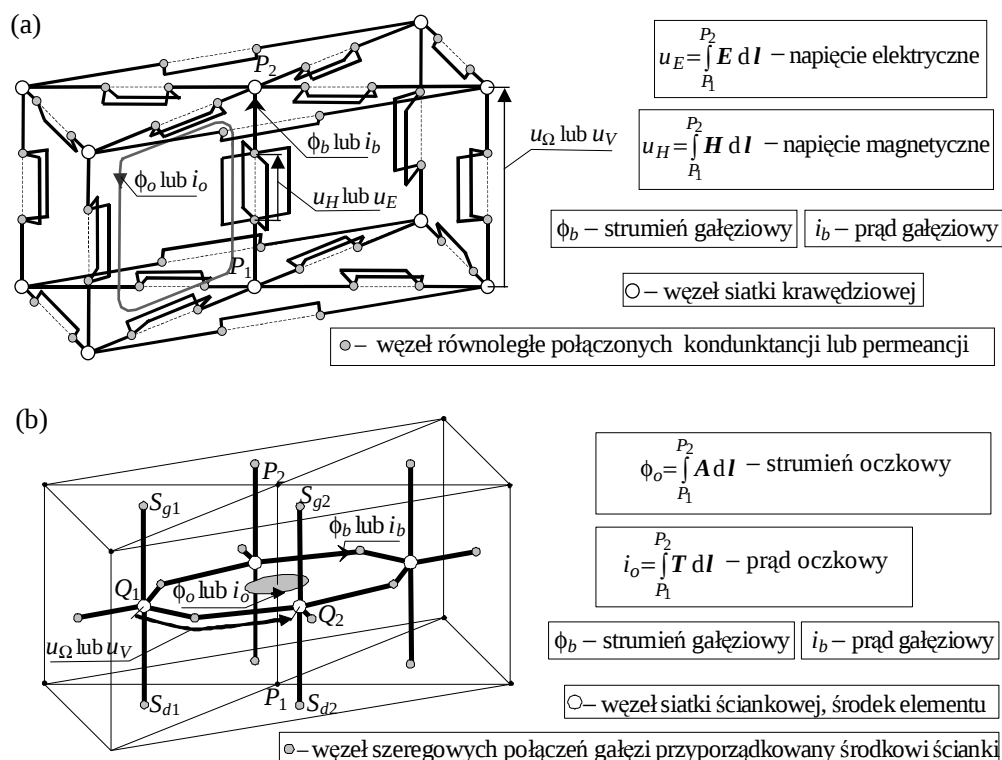
W siatkach wyznaczonych metodą elementów skończonych mogą wystąpić sprzężenia międzygałęziowe, tj. konduktancje i rezystancje wzajemne, co różni je od klasycznych modeli obwodowych. Napięcie na konduktancji i -tej gałęzi może wymusić prąd w j -tej gałęzi SKK, prąd w i -tej gałęzi SSE może wywołać napięcie w j -tej gałęzi tej siatki.

Modele siatkowe całego obszaru podzielonego na elementy skończone otrzymuje się łącząc odpowiednio modele pojedynczych elementów. Przy tworzeniu modeli krawędziowych elektrycznych (konduktancyjnych) i magnetycznych (permeancyjnych) łączy się równolegle gałęzie przyporządkowane wspólnym krawędziom. Na rysunku 2a pokazano fragment modelu krawędziowego utworzony po połączeniu czterech elementów pięciościennych. Model ściankowy tego układu elementów przedstawiono na rysunku 2b. Przy tworzeniu modelu łączono szeregowo gałęzie przyporządkowane wspólnym ściankom.

3. ŹRÓDŁA POLA ELEKTRYCZNEGO I MAGNETYCZNEGO

Podstawową częścią zadania opisu przewodników w przestrzeni elementów skończonych jest formułowanie wyrażeń opisujących siłę magnetomotoryczną (s_{mm}) na podstawie rozplywu prądów przewodnictwa w siatkach konduktancyjnej i rezystancyjnej oraz wyrażeń definiujących siłę elektromotoryczną (s_{em}) generowaną w wymienionych siatkach przez zmienny strumień magnetycznych. Uformowane na podstawie MES siatki krawędziowe są analizowane metodą węzłową. Należy więc

określić źródła gałęziowe. Do analizy siatek ściankowych jest stosowana metoda oczkowa. W obliczeniach można więc posługiwać się źródłami gałęziowymi lub oczkowymi.



Rys. 2. Modele układu czterech elementów pięciościennych: (a) krawędziowy i (b) ściankowy
Fig.2. Models of a region with four five-facet prisms: (a) edge, (b) facet

W omawianych modelach gałęziowe *smm* i *sem* są wyznaczone na podstawie prądów i strumieni oczkowych. Gałęziowe *smm* i *sem* w siatce krawędziowej otrzymuje się na podstawie prądów i strumieni wokół krawędzi, a *smm* i *sem* w siatce ściankowej wyznacza się na podstawie prądów i strumieni w oczkach przyporządkowanych ściankom – rys. 1. Oczkowe *smm* w siatce ściankowej reprezentują ściankowe wartości gęstości prądu $\mathbf{J}$, a oczkowe *sem* są czasowymi pochodnymi ściankowych wartości gęstości $\mathbf{B}$ strumienia magnetycznego. Źródła oczkowe w siatce ściankowej są definiowane na podstawie strumieni i prądów gałęziowych w gałęziach przyporządkowanych krawędziom elementów. W tablicy 1 zestawiono wyrażenia opisujące przedstawione wyżej wielkości gałęziowe i oczkowe na podstawie gęstości prądu i strumienia oraz potencjałów wektorowych.

Tabela 1. Wielkości gałęziowe i oczkowe obwodowym modelu elementu skończonego
Table 1. Branch and loop quantities in the circuit model of a finite element

Wielkości gałęziowe: strumienie ϕ_b , prądy i_b , <i>smm</i> θ_b , <i>sem</i> e_b		Wielkości oczkowe: strumienie ϕ_o , prądy i_o , <i>smm</i> θ_o , <i>sem</i> e_o	
Gałąź $N_{i,j}$ przyporządkowana krawędzi P_iP_j (SK)	Gałąź q -ta przyporządkowana ściance S_q (SS)	Oczko $N_{i,j}$ wokół krawędzi P_iP_j (SS)	Oczko q -te przyporządkowane ściance S_q (SK)
$i_{bN_{i,j}} = \iiint_{V_e} \mathbf{w}_{eN_{i,j}} \mathbf{J} d\mathbf{v}$	$i_{bq} = \iint_{S_q} \mathbf{J} d\mathbf{s}$	$i_{oN_{i,j}} = \int_{P_i}^{P_j} \mathbf{T} d\mathbf{l}$	$i_{oq} = \iiint_{V_e} \mathbf{w}_{fq} \mathbf{T} d\mathbf{v}$
$\phi_{bN_{i,j}} = \iiint_{V_e} \mathbf{w}_{eN_{i,j}} \mathbf{B} d\mathbf{v}$	$\phi_{bq} = \iint_{S_q} \mathbf{B} d\mathbf{s}$	$\phi_{oN_{i,j}} = \int_{P_i}^{P_j} \mathbf{A} d\mathbf{l}$	$\phi_{oq} = \iiint_{V_e} \mathbf{w}_{fq} \mathbf{A} d\mathbf{v}$
$\theta_{bN_{i,j}} = i_{oN_{i,j}}$	$\theta_{bq} = i_{oq}$	$\theta_{oN_{i,j}} = i_{bN_{i,j}}$	$\theta_{oq} = i_{bq}$
$e_{bN_{i,j}} = -p\phi_{oN_{i,j}}$	$e_{bq} = -p\phi_{oq}$	$e_{oN_{i,j}} = -p\phi_{bN_{i,j}}$	$e_{oq} = -p\phi_{bq}$
Uwagi: $\mathbf{w}_{eN_{i,j}}$ – funkcja interpolacyjna elementu krawędziowego dla krawędzi P_iP_j , V_e – objętość elementu, $\mathbf{w}_{fq}$ – funkcja interpolacyjna elementu ściankowego dla ścianki S_q , $p=d/dt$			

4. PRZEWODZĄCE OBSZARY JEDNOSPÓJNE

Do analizy pola w przewodzących obszarach jednospójnych, np. w masywnych elementach rdzenia bez “dziur” można stosować zarówno sformułowanie wykorzystujące elektryczny potencjał skalarny jak i potencjał wektorowy. Najbardziej popularne jest sformułowanie $\mathbf{A}$ - V wykorzystujące wektorowy potencjał magnetyczny $\mathbf{A}$ i skalarny elektryczny V . Obwodowym reprezentantem tego sformułowania jest model złożony z krawędziowej (konduktancyjnej) siatki elektrycznej i ściankowej siatki magnetycznej, a więc model SSM-SKK. Oczkowe *smm* w SSM wyznacza się na podstawie prądu w gałęziach SKK, a gałęziowe *sem* w SSK na podstawie pochodnej czasowej strumieni w oczkach SSM. Na przykład, *smm* w pokazanym na rysunku 2b oczku wokół krawędzi P_1P_2 odpowiada prąd w gałęzi P_1P_2 siatki krawędziowej z rysunku 2a.

Do analizy rozkładu prądów wirowych w układach jednospójnych można stosować także metody wykorzystujące wektorowy potencjał $\mathbf{T}$ pola przepływowego prądów. Wyodrębnia się dwa sformułowania wykorzystujące ten potencjał: (a) sformułowanie Ω - $\mathbf{T}$, w którym pole magnetyczne jest opisane za pomocą potencjału skalarnego Ω i sformułowanie $\mathbf{A}$ - $\mathbf{T}$, w którym stosuje się magnetyczny potencjał wektorowy $\mathbf{A}$.

Równania MES dla sformułowania Ω - $\mathbf{T}$ odpowiadają równaniom siatek magnetycznej krawędziowej i elektrycznej ściankowej, sprzężonych przez źródła (model SKM-SSR). Gałęziowe *smm* w SKM wyznacza się na podstawie prądów w oczkach

SSR, a oczkowe sem w SSK na podstawie pochodnej czasowej strumieni w oczkach SSM. Równania MEK dla rzadko stosowanego sformułowaniu $A-T$ odpowiadają równaniom oczkowym ściankowych siatek magnetycznej i elektrycznej, (model SSM-SSR). W celu wyznaczenia oczkowych smm i oczkowych sem w tym modelu należy na podstawie prądów i strumieni gałęziowych w SS, tj. wielkości ściankowych, określić wielkości przyporządkowane krawędziom. Wykorzystuje się przy tym parametry wagowe obliczane na podstawie całki objętościowej z iloczynu funkcji ściankowej i krawędziowej. Na przykład, dla gałęzi $S_{d1}Q_1$ i krawędzi P_1P_2 układu z rysunku 2 parametr wagowy jest równy $1/6$. W związku z tym wielkości przyporządkowane krawędzi P_1P_2 otrzymuje się sumując wielkości gałęziowe w gałęziach $S_{di}Q_i$, Q_iS_{gi} z wagą $1/6$. Sumowanie dotyczy gałęzi w elementach o krawędzi P_1P_2 i odnosi się do gałęzi równoległych do tej krawędzi. Na podstawie prądów przyporządkowanych krawędziom wyraża się smm w ściankowej siatce magnetycznej, a na podstawie pochodnej strumieni sem w ściankowej siatce rezystancyjnej.

Do analizy prądów wirowych w układach z dwuwymiarowym polem magnetycznym ujęcia wykorzystujące wektorowy potencjał magnetyczny nie są stosowane. W tego typu układach rozpatruje się tylko jedną składową wektora gęstości prądu, np. składową J_z . Pomimo tego potencjał wektorowy T ma dwie składowe, co komplikuje opis pola prądów przewodnictwa. Metodę potencjału T z powodzeniem stosuje się do analizy układów trójwymiarowych, w tym układów ze niejednostajnymi obszarami przewodzącym.

LITERATURA

- [1] Davidson J. A., Balchin M. J., *Three dimensional eddy currents calculation using a network method*, IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 19, 1983, No. 6, 2325-2328.
- [2] Demenko A., Sykulski J., *Network equivalents of nodal and edge elements in electromagnetics*, IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 38, 2002, No. 2, 1305-1308.
- [3] Demenko A., *Obwodowe modele układów z polem elektromagnetycznym*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2004.

NETWORK REPRESENTATION OF CONDUCTING REGIONS IN THE FIELD MODELS OF ELECTRICAL MACHINES – THE CASE OF SIMPLY CONNECTED REGIONS

The paper introduces a network description of conducting regions in electrical machines. Resistance models are considered, where loop equations are equivalent to an edge element formulation (EEM) using the electric vector potential T , as well as conductance models, for which the nodal equations refer to a nodal element description (NEM) by means of the scalar potential V . For the field of conducting currents the edge value of the vector potential T is interpreted using the language of circuit theory. The network models of simply connected conducting regions are introduced. The models under discussion relate to the method with an electric scalar potential V and a magnetic vector potential A and to the methods using an electric vector potential T and magnetic scalar Ω and vector A potentials.