

pole elektromagnetyczne, prądy wirowe, metoda elementów skończonych, obwody magnetyczne, maszyny elektryczne

Andrzej DEMENKO*, Rafał WOJCIECHOWSKI*, Jan SYKULSKI**

SIATKOWA REPREZENTACJA OBSZARÓW PRZEWODZĄCYCH W POŁOWYCH MODELACH MASZYN ELEKTRYCZNYCH – OBSZARY NIEJEDNOSPÓJNE

W pracy przedstawiono obwodowe modele niejednostopólnych obszarów ze środowiskami przewodzącymi w przetwornikach elektromagnetycznych. Rozpatrzono układy z uzwojeniami o cienkich przewodach i układy z uzwojeniami prętowymi. Opisano modele rezystancyjne układu cewek wielozwojnych, których równania oczkowe są równaniami metody elementów krawędziowych (MEK) dla ujęć wykorzystujących potencjał wektorowy T_0 . Przedstawiono obwodową reprezentację wartości krawędziowej tego potencjału. Omówiono siatkowe modele niejednostopólnych obszarów dla sformułowań wykorzystujących elektryczne potencjały wektorowe T , T_0 , i skalarny lub wektorowy potencjał magnetyczny, a więc dla sformułowań Ω - T - T_0 , A - T - T_0 . Zwrócono uwagę na korzyści wynikające ze stosowania potencjałów wektorowych T , T_0 w obliczeniach rozprzysu prądów indukowanych metodą elementów skończonych.

1. WPROWADZENIE

W ostatnich latach w obliczeniach symulacyjnych i projektowych przetworników elektromagnetycznych powszechnie stosuje się metody połowo-obwodowe. W metodach tych równania metody elementów skończonych (MES) dla pola magnetycznego łączy się z równaniami napięciowymi układu uzwojeń obwodów. Siły elektromotoryczne wzniesane w uzwojeniach są obliczane na podstawie zmian strumienia magnetycznego wyznaczonego metodą elementów skończonych, a źródła pola magnetycznego wyraża się za pomocą prądów uzwojeń. Metody połowo-obwodowe można z powodzeniem stosować w obliczeniach układów z dwuwymiarowym polem magnetycznym. Przy analizie tego typu układów zakłada się, że wektor gęstości ma jedną składową. W związku z tym niejednostopłne obszary przewodzące nie mogą być

* Politechnika Poznańska, ul. Piotrowo 3a, Poznań, PL - 60 965

** University of Southampton, Southampton SO17 1BJ, UK

rozpatrywane polowo. Trzeba łączyć równania pola z równaniami typowymi dla metod teorii obwodów, np. przy formowaniu modelu uzwojenia klatkowego metody polowe stosuje się do opisu rozptywu prądów w prętach, a wycinki pierścieni rozpatruje się jednowymiarowo jako elementy o zadanych parametrach skupionych. Specyfika polowego opisu obszarów przewodzących niejednostopólnych ujawnia się dopiero przy formowaniu modeli układów z polem trójwymiarowym. Przy obliczaniu rozkładu pola w obszarach niejednostopólnych nie można stosować modeli, które zostały omówione w pierwszej części artykułu [4], a dotyczą obszarów jednostopólnych. Należy stosować modele dostosowane do specyfiki układu.

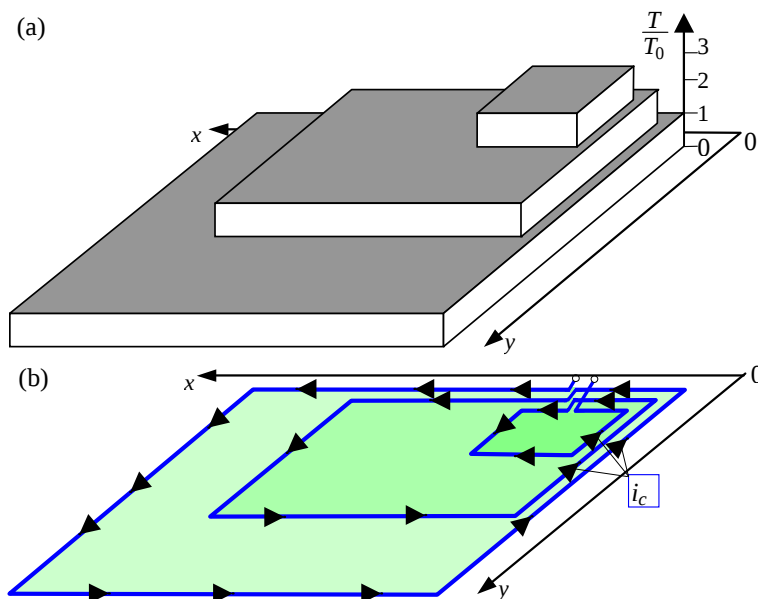
Przedłożony artykuł prezentuje wyniki ostatnich badań autorów nad modelowaniem rozptywu prądów indukowanych w uzwojeniach maszyn elektrycznych. Koncentruje się na obwodowym (siatkowym) opisie niejednostopólnych obszarów z prądami przewodnictwa. Podejście ma ułatwić połączenie równań pola przepływowego prądu z równaniami obwodów układów zasilających. Między innymi rozpatrzone zostały sprzężenia pomiędzy siatką magnetyczną i elektryczną w modelach układów z uzwojeniami.

2. OBWODOWA REPREZENTACJA WEKTOROWEGO POTENCJAŁU T_0

W pracach [2,3] wykazano, że równania MES dla ujęć wykorzystujących potencjały odpowiadają równaniom dwóch typów siatek: (a) siatek krawędziowych (SK) magnetycznych (SKM) i elektrycznych (SKE) o gałęziach przyporządkowanych krawędziom elementów i (b) siatek ściankowych (SS) magnetycznych (SSM) i elektrycznych (SSE) o gałęziach łączących środki objętości sąsiadujących elementów i przyporządkowanych ściankom. Równania węzłowe SK odpowiadają równaniom metody elementów węzłowych (MEW) dla sformułowań wykorzystujących potencjały skalarne [2]. Równania oczkowe SS odpowiadają równaniom metody elementów krawędziowych (MEK) dla sformułowań wykorzystujących potencjały wektorowe $\mathbf{A}$, $\mathbf{T}$. Strumienie i prądy oczkowe w oczkach wokół krawędzi elementów skończonych są krawędziowymi wartościami potencjałów $\mathbf{A}$, $\mathbf{T}$ [3].

Na podstawie ściankowych modeli elementów z polem elektrycznym można uformować modele obszarów z uzwojeniami o cienkich przewodach. Należy uwzględnić, że w obszarze z cienkimi przewodami środowisko jest anizotropowe [3], a kierunek wektora gęstości prądu jest zadany. W rezultacie otrzymuje się model, którego równania są równaniami oczkowymi uzwojeń o cienkich przewodach. Prąd oczkowy w układzie jest reprezentowany przez krawędziową wartość potencjału T_0 . Potencjał ten wprowadzony został z myślą o odwzorowaniu układów o zadanym kierunku wektora gęstości prądu [1, 4]. Rozkład T_0 potencjału można określić na podstawie funkcji opisujących położenie pętli uzwojeń. Najwygodniej jest posługiwać się potencjałem T_0 dla pojedynczego zwoju. W układzie z cewkami wielozwojnymi wy-

podkowy rozkład elektrycznego potencjału wektorowego $\mathbf{T}$ uzyskuje się poprzez superpozycję rozkładów od pojedynczych zwojów – rys 1. W przedstawionym na rysunku 1 rozkładzie na liniach reprezentujących pętle uzwojeń skokowo zmienia się składowa T_z potencjału. W związku z tym po uwzględnieniu, że $\mathbf{J}=\text{rot}\mathbf{T}$ i wykorzystaniu twierdzenia Stokesa dla przewodu o średnicy d , przy $d \rightarrow 0$, otrzymuje się



Rys. 1. Rozkład składowej T_z potencjału $\mathbf{T}$ na płaszczyźnie x,y (a) wzniecony przez 3-zwojną cewkę (b)

Fig.1. Distribution of z-th component of potential $\mathbf{T}$ on the surface x,y (a) as forced by a 3-turn coil (b)

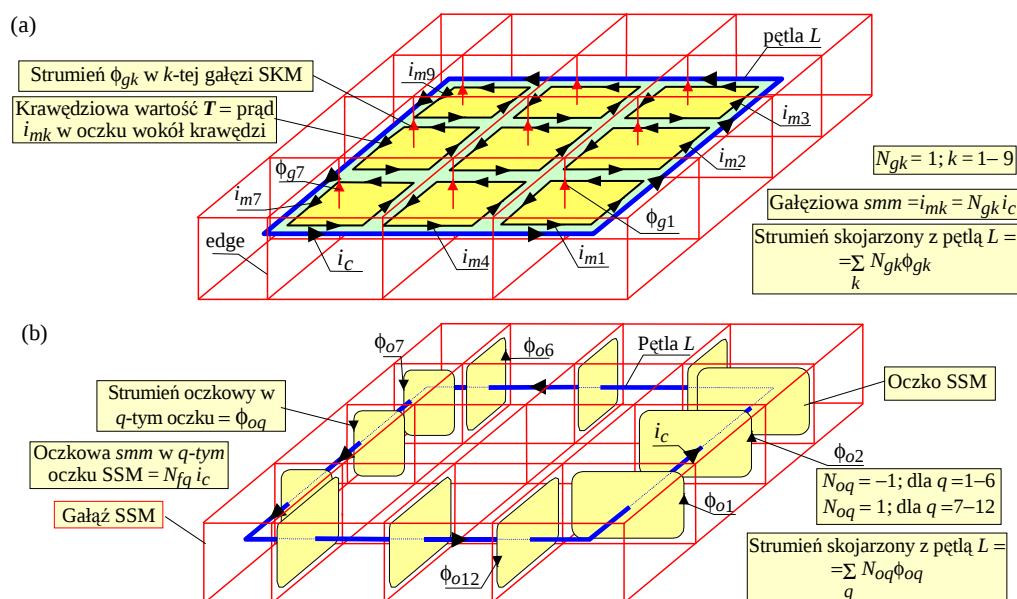
$$i_c = \iint_{S_p} \mathbf{J} d\mathbf{s} = \oint_L \mathbf{T} d\mathbf{l} = T_0 d \quad (1)$$

Iloczyn $T_0 d$ można rozpatrywać jako wartość krawędziową potencjału $\mathbf{T}$ dla krawędzi odpowiadającej średnicy przewodu.

3. MODELE OBSZARU Z UZWOJENIAMI O CIENKICH PRZEWODACH

Wyodrębnić można dwa grupy metod opisu uzwojeń w przestrzeni elementów skończonych: (a) metody polegająca na definiowaniu liczby przewodów przecinających ścianki elementów i (b) metody, w których definiuje się uzwojenia na podstawie przecięć krawędzi elementów z powierzchniami zwojów. Metody (a) opisują uzwojenia w przestrzeni elementów ściankowych i po ich zastosowaniu uzyskuje się

oczkowe s_{mm} w SSM. Wektor oczkowych s_{mm} wyraża się w postaci iloczynu macierzy N_o o wyrazach równych liczb zwojów przechodzących przez oczka SSM i wektora i_c prądów w obwodach uzwojeń. Metody (b) opisują uzwojenia w przestrzeni elementów krawędziowych i są wykorzystywane do wyznaczania gałęziowych s_{mm} w SKM. Wektor gałęziowych s_{mm} uzyskuje się mnożąc macierz N_g liczb zwojów wokół gałęzi przez wektor i_c prądów obwodów. Liczby zwojów wokół gałęzi znajduje się na podstawie liczb powierzchni zwojów, przez które przechodzą krawędzie – rys. 2. Na przykład dla układu z rysunku 1 wyrazy macierzy N_g są równe 1, 2 lub 3, w zależności od położenia krawędzi. Zadanie wyznaczania k -tej kolumny macierzy N_g jest numerycznym reprezentantem zadania wyznaczania wektora T z równania $J = \text{rot} T$ dla jednostkowego prądu w k -tym zwojeniu [5]. Transponowane macierze N_o , N_g służą do wyznaczenia strumienia skojarzonego z uzwojeniami – rys. 2. W modelach o SKM strumień skojarzony z uzwojeniami uzyskuje się mnożąc transponowaną macierz N_g przez wektor strumieni w gałęziach. W układach o SSM strumień skojarzony jest iloczynem transponowanej macierzy N_o i wektora strumieni oczkowych – rys. 2. Ten iloczyn jest numeryczną reprezentacją wzoru opisującego strumień na podstawie całki z wektorowego potencjału magnetycznego.

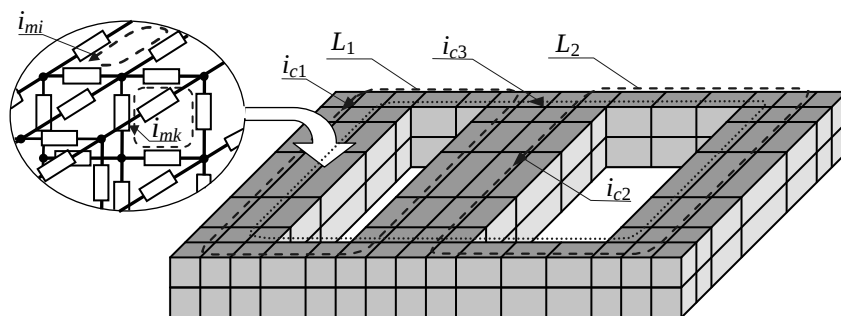


Rys.2. Zwój w obszarze magnetycznej siatki krawędziowej (a) i magnetycznej siatki ściankowej (b)
Fig. 2. A turn in the region of the edge magnetic network (a) and the facet magnetic network (b)

4. MODELE OBSZARU Z UZWOJENIAMI PRĘTOWYMI

W ujęciu trójwymiarowym obszary z uzwojeniami prętowymi rozpatruje się jako obszary niejednostopne z prądami wirowymi. Klasycznym przykładem takiego obszaru jest masywna płyta przewodząca z otworami – rys. 3. W maszynach elektrycznych typowymi układami o przewodzących obszarach niejednostopnych z prądami wirowymi są uzwojenia klatkowe i wielozwojne uzwojenia prętowe. Przedstawiony na rysunku 3 układ można rozpatrywać jako obejmujący 3 pręty fragment uzwojenia klatkowego.

Do analizy rozplywu prądów wirowych w omawianych układach najczęściej stosuje się metodę skalarne go potencjału elektrycznego, dla której równania MES są równaniami węzłowymi SKE [4]. Równia te rozwiązuje się dla zadanych gałęziowych *sem*. Gałęziowe *sem* w SKE definiuje się na podstawie strumieni oczkowych wokół krawędzi, a więc na podstawie wielkości, które są obwodowymi reprezentantami magnetycznego potencjału wektorowego. W związku z tym metodę potencjału *V* łączy się z metodą potencjału *A*. Ostatnio do analizy układów niejednostopnych coraz częściej stosuje się metody elektrycznego potencjału wektorowego *T*. W klasycznym ujęciu MEK równania dla sformułowań wykorzystujących potencjał *T* reprezentują równania oczkowe siatki rezystancyjnej dla oczek wokół krawędzi (oczka z prądami i_{mi} i i_{mk} na rysunku 3). W związku z tym klasyczna metoda potencjału *T* nie nadaje się do analizy obszarów niejednostopnych. Równania metody należy uzupełnić równaniami dla oczek wokół otworów, np. dla oczek L_1 , L_2 pokazanych na rysunku 3. Prąd w tych oczkach reprezentuje krawędziową wartość T_0 . W związku z tym metodę nazwano metodą potencjałów $T-T_0$. Rezystancyjny model obszaru niejednostopnego można połączyć zarówno z siatką magnetyczną krawędziową (metoda $\Omega-T-T_0$) jak i siatką magnetyczną ściankową (metoda $A-T-T_0$).



Rys. 3. Siatkowy model niejednostopnego obszaru przewodzącego z dwoma otworami

Fig.2. The network model of a multiply connected conductor with two holes

Pętle wokół otworów definiuje się tak samo jak zwoje o cienkich przewodach. Wykorzystuje się więc opis przedstawiony w poprzednim rozdziale. Interesujące są

wyniki badań nad wyborem pętli L_i . Pętle L_i trzeba tak uformować aby dodatkowe oczka z prądami i_{ci} dopełniały zbiór oczek podstawowych. Okazuje się, że jeśli do rozwiązywania równań oczkowych stosuje się metody iteracyjne, to korzystne jest przyjmowanie nadmiarowej liczby pętli L_i . Na przykład, iteracyjny proces rozwiązywania metodą nadrelaksacji równań oczkowych siatki rezystancyjnej z rysunku 3 jest szybciej zbieżny jeśli do równań dla oczek z prądami i_{c1} , i_{c2} doda się równanie dla „nadmiarowego oczka” z prądem i_{c3} .

3. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono współczesne metody opisu układów z prądami indukowanymi w maszynach elektrycznych. Zwrócono uwagę na nowe ujęcie wykorzystujące elektryczny potencjał wektorowy T_0 . Krawędziowa wartość tego potencjału jest prądem oczkowym w pętli o zadanym kształcie i położeniu. Metody wykorzystujące potencjał T_0 w połączeniu z klasycznym elektrycznym potencjałem wektorowym T i magnetycznymi potencjałami skalarnym lub wektorowym potencjałem można z powodzeniem wykorzystywać do analizy prądów indukowanych w niejednorodnych obszarach przewodzących.

LITERATURA

- [1] Bui V.P., Le Floch Y., Meunier G., Coulomb J. L., *A new three-dimensional (3-D) scalar finite element method to compute T_0* , IEEE Trans. on Magnetism, 2006, Vol. 42, No. 4, 2325-2328.
- [2] Demenko A., Sykulski J., *Network equivalents of nodal and edge elements in electromagnetics*, IEEE Trans. on Magnetism, Vol. 38, 2002, No. 2, 1305-1308.
- [3] Demenko A., *Obwodowe modele układów z polem elektromagnetycznym*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2004.
- [4] Demenko A., Sykulski J., Wojciechowski R., *Siatkowa reprezentacja obszarów przewodzących w polowych modelach maszyn elektrycznych - obszary jednociepne*, Prace Instytutu Maszyn, Napędów i Pomiarów Elektrycznych Politechniki Wrocławskiej, 2008, Nr 61, w druku.
- [5] Ren Z., *T - Ω formulation for eddy-current problems in multiply connected regions*, IEEE Trans. on Magnetism, 2002, Vol. 38, No. 2, 557-560.

NETWORK REPRESENTATION OF CONDUCTING REGIONS IN THE FIELD MODELS OF ELECTRICAL MACHINES – THE CASE OF MULTIPLY CONNECTED REGIONS

Circuit models of multiply connected regions in electromagnetic transducers are discussed. Both thin and rod conductors are considered. Resistive models of multi-turn coils are described for which the loop equations form edge elements involving the potential T_0 . Formulations are expressed in terms of electric vector potentials T , T_0 , and scalar or vector magnetic potentials, Ω - T - T_0 , A - T - T_0 . Advantages of using the T , T_0 formulation are highlighted.