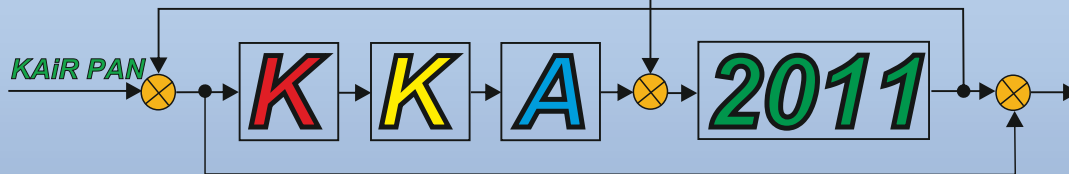




Politechnika Świętokrzyska
Kielce University of Technology



XVII KRAJOWA KONFERENCJA AUTOMATYKI – KKA'2011

Kielce – Cedzyna 19-22.06.2011 r.

Politechnika
Kielce



Świętokrzyska
2011

NOWE METODY BADANIA STABILNOŚCI KLASY LINIOWYCH UKŁADÓW DWUWYMIAROWYCH

Wojciech PASZKE*, Krzysztof GAŁKOWSKI*, Eric ROGERS**, Anton KUMMERT***

*Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
ul. Podgórna 50, 65-246, Zielona Góra,
e-mail: {W.Paszke, K.Galkowski}@issi.uz.zgora.pl[†]

**University of Southampton, School of Electronics and Computer Science
Southampton SO17 1BJ, United Kingdom,
e-mail: etar@ecs.soton.ac.uk

***University of Wuppertal, Faculty of Electrical, Information
and Media Engineering, Communication Theory, Wuppertal, Germany,
e-mail: kummert@uni-wuppertal.de

Streszczenie: Jednym z najważniejszych problemów w teorii układów dwuwymiarowych jest sformułowanie takich warunków koniecznych i wystarczających stabilności, których sprawdzenie wymagać będzie niewielkiego nakładu obliczeniowego oraz umożliwi relatywnie łatwe jego zastosowanie w zagadnieniach syntezy regulatorów. W niniejszym artykule sformułujemy warunki wystarczające i konieczne stabilności wzdłuż pasa dla liniowych procesów powtarzalnych, a następnie użyjemy ich do analizy stabilności asymptotycznej liniowych układów dwuwymiarowych opisanych lokalnymi modelami stanowymi. Zaproponowane warunki stabilności są podane w formie problemów optymalizacji wypukłej z ograniczeniami w postaci liniowych nierówności macierzowych. Załączono przykłady numeryczne w celu ilustracji efektywności prezentowanych wyników.

Słowa kluczowe: Liniowe układy dwuwymiarowe, stabilność asymptotyczna, liniowe procesy powtarzalne, liniowe nierówności macierzowe.

1. WPROWADZENIE

Układy wielowymiarowe, a w szczególności układy dwuwymiarowe (2D) znalazły zastosowanie w opisie wielu zjawisk i procesów występujących w licznych dziedzinach współczesnej techniki [9]. Szczególnie interesującymi zastosowaniami są układy wielowymiarowego przetwarzania sygnałów i obrazów, kodowania i dekodowania oraz filtracji sygnałów, które często są używane w grafice komputerowej [1, 3].

Należy jednak podkreślić, że zastosowanie modeli wielowymiarowych jest bardzo ograniczone, głównie ze względu na brak dobrze rozwiniętej teorii układów wielowymiarowych, która dostarczyłaby odpowiedniego formalizmu matematycznego, umożliwiającego zapisanie wielu problemów analizy i syntezy w postaci predestynującej do zastosowania szerokiego wachlarza efektywnych metod numerycznych.

W przypadku klasycznych układów jednowymiarowych (1D) pokazano, iż wiele problemów analizy i syntezy może być sprowadzonych do postaci problemów badania własności pewnych wielomianów lub macierzy. Innymi słowy, problemy analizy i syntezy sprowadza się głównie do problemów związanych z wyznaczaniem i lokowaniem biegunów układu. Z kolei te problemy, mogą być rozwiązane przy użyciu efektywnych algorytmów numerycznych. Przykładem takiego problemu jest badanie stabilności układów jednowymiarowych.

[†]Niniejsza praca została częściowo zrealizowana przy wsparciu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, grant Nr N N514 636540

Istotnie, rozwiązanie problemu stabilności może być sprowadzone do wyznaczenia wartości własnych macierzy systemowej i sprawdzenia czy wszystkie one mają moduły mniejsze od 1 (w przypadku układów dyskretnych) lub leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej (dla układów ciągłych). Z kolei, wartości własne macierzy zawsze mogą być efektywnie wyznaczone przy pomocy komputera. Alternatywnymi metodami określania stabilności układu jest użycie kryterium Routh'a lub metod Lapunowa z wykorzystaniem optymalizacji wypukłej [2].

Naturalnym jest postawienie pytania, czy problemy analizy i syntezy układów wielowymiarowych, a w szczególności 2D, mogą być równie efektywnie rozwiązane jak to ma miejsce w przypadku układów jednowymiarowych. Niestety, okazuje się, że zastosowanie znanych (tj. stosowanych w teorii układów 1D) i efektywnych metod do rozwiązywania problemów analizy i syntezy układów wielowymiarowych jest bardzo ograniczone, a często nawet niemożliwe. Trudności te są już widoczne gdy chcemy sformułować warunki konieczne i wystarczające stabilności asymptotycznej liniowych układów 2D.

Najbardziej istotnym faktem, komplikującym formułowanie warunków koniecznych i wystarczających stabilności asymptotycznej układów 2D jest możliwość istnienia nieskończonego wielu biegunów układu. Dlatego też, trudno lub wręcz niemożliwym jest testowanie położenia każdego bieguna układu (gdy ich liczba dąży do nieskończoności), co jest odpowiednikiem tradycyjnego spektralnego warunku stabilności układu.

Niniejszy artykuł proponuje użycie znanych warunków koniecznych i wystarczających stabilności wzdłuż pasa dla liniowych procesów powtarzalnych (*ang. Linear Repetitive Processes - LRP*s) do analizy stabilności asymptotycznej układów 2D. Jest to możliwe, gdyż LRPs są jedną z podklas układów 2D o szczególnych zastosowaniach - zobacz [10, 5, 6]. Cechą charakterystyczną liniowych procesów powtarzalnych LRPs jest wielokrotne powtarzanie, teoretycznie nieskończoną ilość razy, pewnej czynności na danym obiekcie ale, co jest ważne, przy zmieniających się warunkach, tak że układ nie jest okresowy. Do opisu takich układów wykorzystujemy, tak jak to ma miejsce w przypadku układów 2D, dwie zmienne niezależne reprezentujące kolejno: numer czynności, która ma oczywiście charakter dyskretny oraz czas związany wykonywaną czynnością, reprezentowaną przez zmienną o charakterze ciągłym lub dyskretnym. Cały układ jest więc układem dyskretnym lub ciągle-dyskretnym. Szczególnie ważne jest, że zmienna "wzdłuż pasa" posiada ograniczoną wartość (w większości przypadków przyjmuje się, że jest to wartość stała - oznaczoną tutaj symbolem α).

W przypadku LRPs mamy dwie podstawowe koncepcje stabilności: asymptotyczną i wzdłuż pasa. Stabilność asymptotyczna liniowych LRPs określa, że sekwencja ograniczonych sygnałów wejściowych daje ograniczoną sekwencję sygnałów wyjściowych (profilu pasa). Ponieważ stabilność asymptotyczną procesu powtarzalnego gwarantuje jedynie istnienie tylko pewnego ustalonego profilu granicznego to w wielu jednak przypadkach własność ta nie jest wystarczająca, gdyż proces może być niestabilny wzdłuż tego profilu. Dlatego też musi być zastosowany mocniejszy warunek stabilności, który zapewni stabilność procesu wzdłuż pasa. Stabilność taka jest nazywana w literaturze [10] stabilnością wzdłuż pasa i co najważniejsze jest ona w wielu przypadkach równoważna stabilności asymptotycznej liniowego układu 2D. Korzystając z tego właśnie faktu oraz kilku znanych z literatury twierdzeń udało się sformułować oryginalne warunki konieczne i wystarczające stabilności w formie liniowych nierówności macierzowych (*ang. linear matrix inequalities - LMIs*). Atrakcyjność proponowanego podejścia związana jest z istnieniem tzw. algorytmów punktu wewnętrznego, posiadających relatywnie niską złożoność obliczeniową, które służą do rozwiązania problemów optymalizacyjnych z ograniczeniami w postaci LMIs. Dodatkowym atutem takiego postępowania jest możliwość wykorzystania otrzymanych wyników do rozwiązania problemu syntezy regulatora stabilizującego niestabilny asymptotycznie układ 2D. Jedną niedogodnością, która zawęża klasę układów dla których możemy stosować zaproponowane warunki stabilności jest to, iż mogą one być stosowane dla LRPs z jednym wejściem i jednym wyjściem. Oznacza to, że ograniczmy stosowanie warunków stabilności do układów 2D, gdzie w przypadku opisu modelem stanowym Roessera mamy podwektor pionowy bądź poziomy o długości równej 1.

W prezentowanym artykule przyjęliśmy następujące oznaczenia: macierze zerowe i jednostkowe odpowiednich wymiarów są oznaczone przez 0 i I . Ponadto, $M \succ 0$ oznacza, że macierz M jest rzeczywista, symetryczna i dodatnio określona, a $M \prec 0$ oznacza że macierz M jest rzeczywista, symetryczna i ujemnie określona. Operatory $\sigma(M)$ oraz $\rho(M)$ oznaczają odpowiednio spektrum oraz promień spektralny danej macierzy M , a M^\perp oznacza ortogonalne uzupełnienie macierzy M .

W toku przeprowadzanych dowodów przydatne będą również następujące lematy, których dowody i za-

stosowania zostały przedstawione w [8, 12, 4].

Lemat 1 Dla dyskretnego układu liniowego o transmitancji $G(z)$ i odpowiedzi częstotliwościowej

$$G(e^{j\theta}) = \mathcal{C}(e^{j\theta}I - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$$

następujące nierówności są sobie równoważne

$$(i) \quad \begin{bmatrix} G(e^{j\theta}) \\ I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} G(e^{j\theta}) \\ I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad (1)$$

gdzie Π jest daną rzeczywistą macierzą symetryczną.

$$(ii) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{A} \mathcal{B} \\ I \ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P & Q \\ Q & P - 2Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \mathcal{B} \\ I \ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{C} \mathcal{D} \\ 0 \ I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} \mathcal{C} \mathcal{D} \\ 0 \ I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2)$$

gdzie $Q \succ 0$, P jest macierzą symetryczną.

Lemat 2 Dla ciągłego układu liniowego o transmitancji $G(s)$ i odpowiedzi częstotliwościowej

$$G(j\omega) = \mathcal{C}(j\omega I - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$$

następujące nierówności są sobie równoważne

$$(i) \quad \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (3)$$

gdzie Π jest daną rzeczywistą macierzą symetryczną.

$$(ii) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{A} \mathcal{B} \\ I \ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \mathcal{B} \\ I \ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{C} \mathcal{D} \\ 0 \ I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} \mathcal{C} \mathcal{D} \\ 0 \ I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4)$$

gdzie $Q \succ 0$, P jest macierzą symetryczną.

Lemat 3 Dla danej macierzy symetrycznej $\Psi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ oraz dwóch macierzy Π, Σ odpowiednich rozmiarów, istnieje macierz W taka, że

$$\Psi + \Pi^T W^T \Sigma + \Sigma^T W \Pi \prec 0$$

wtedy i tylko wtedy gdy poniższe nierówności macierzowe są spełnione dla macierzy W

$$\Pi^\perp \Psi \Pi^{\perp T} \prec 0, \quad \Sigma^\perp \Psi \Sigma^{\perp T} \prec 0 \quad (5)$$

2. Liniowe procesy powtarzane i ich stabilność

Ponieważ dynamika wzdłuż pasa liniowych procesów powtarzalnych może być opisywana równaniem różnicowym lub różniczkowym zmiennej niezależnej (która może mieć charakterystykę czasową bądź przestrzenną), dwie podklasy liniowych procesów powtarzalnych mogą być rozważane

- dyskretne LRPs, gdzie dynamika w obu kierunkach jest opisywana równaniem różnicowym,

- różniczkowe LRPs gdzie, w przeciwieństwie do dyskretnych LRPs, dynamika wzdłuż pasa opisywana jest równaniem różniczkowym zmiennej niezależnej (dynamika z pasa na pas jest wciąż opisywana równaniem różnicowym).

Model stanowy różniczkowego LRP ma następującą, powszechnie znaną [10], formę dla $0 \leq t \leq \alpha$, $k \geq 0$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{k+1}(t) &= A_{11}x_{k+1}(t) + A_{12}y_k(t) + B_1u_{k+1}(t) \\ y_{k+1}(t) &= A_{21}x_{k+1}(t) + A_{22}y_k(t) + B_2u_{k+1}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

W powyższym równaniu, k oznacza indeks pasa (powtórzenia), $x_k(t) \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem stanu, $y_k(t) \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem profilu pasa (wyjścia), $u_k(t) \in \mathbb{R}^l$ jest wektorem sterowań.

Do pełnego opisu procesu należy jeszcze zdefiniować warunki brzegowe, które w niniejszym artykule mają następującą formę (lecz inne formy są również możliwe):

$$\begin{aligned} x_{k+1}(0) &= d_{k+1}, \quad k \geq 0, \\ y_0(t) &= f(t), \quad 0 \leq t \leq \alpha \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie $f(t)$ jest znaną funkcją zmiennej $t \in [0, \alpha]$ a $d_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem stałych elementów .

W przypadku dyskretnego LRP, model stanowy ma poniższą postać dla $0 \leq p < \alpha$, $k \geq 0$

$$\begin{aligned} x_{k+1}(p+1) &= A_{11}x_{k+1}(p) + A_{12}y_k(p) + B_1u_{k+1}(p) \\ y_{k+1}(p) &= A_{21}x_{k+1}(p) + A_{22}y_k(p) + B_2u_{k+1}(p) \end{aligned} \quad (8)$$

W powyższym równaniu przyjmujemy te same oznaczenia jak w przypadku modelu (6). Powtórnie należy również zdefiniować warunki brzegowe, które mogą być zdefiniowane w następujący sposób

$$\begin{aligned} x_{k+1}(0) &= d_{k+1}, \quad k \geq 0, \\ y_0(p) &= f(p), \quad p = 0, 1, \dots, \alpha - 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Jak już zostało wspomniane we wprowadzeniu, w celu otrzymania warunków koniecznych i wystarczających stabilności asymptotycznej układów 2D użyjemy zestawu warunków stabilności wzdłuż pasa LRPs.

Badanie stabilności powyżej przedstawionych procesów odbywa się z wykorzystaniem teorii stabilności układów 2D po wprowadzeniu drobnych modyfikacji, które jednak nie mają wpływu na stabilność. W tym celu definiujemy operatory przesunięcia z_1 , z_2 wzdłuż pasa (kierunek p) i z pasa na pas (kierunek k)

$$\begin{aligned} x_k(p) &:= z_1 x_k(p+1), \\ y_k(p) &:= z_2 y_{k+1}(p) \end{aligned}$$

W takim przypadku dwuwymiarowy wielomian charakterystyczny dla dyskretnych LRPs (8) jest zdefiniowany jako

$$\rho(z_1, z_2) = \det \left(\begin{bmatrix} I - z_1 A_{11} & -z_1 A_{12} \\ -z_2 A_{21} & I - z_2 A_{22} \end{bmatrix} \right)$$

Z drugiej strony poprzez zastosowanie przekształcenia s/z zamiast z_1/z_2 jak to było powyżej, wielomian charakterystyczny dla różniczkowych LRPs (6) jest uzyskiwany

$$\rho(s, z) := \det \left(\begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ -zA_{21} & I - zA_{22} \end{bmatrix} \right)$$

Na podstawie tych wielomianów charakterystycznych, warunki stabilności dla dyskretnych i różniczkowych LRPs mogą być zdefiniowane.

Lemat 4 [10] *LRP jest stabilny wzdłuż pasa wtedy i tylko wtedy gdy*

a)

$$\rho(s, z) \neq 0, \quad \forall (s, z) : \operatorname{Re}(s) \geq 0, |z| \leq 1$$

w przypadku różniczkowych LRPs (6)

b)

$$\rho(z_1, z_2) \neq 0, \forall (z_1, z_2) : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1$$

w przypadku dyskretnych LRP (8)

Ponieważ, powyższe warunki stabilności (uzyskane przy bezpośrednim wykorzystaniu teorii stabilności układów 2D) oparte są o wyznaczanie zer dwuwymiarowego wielomianu charakterystycznego i dlatego brak jest odpowiednich narzędzi do ich sprawdzenia gdyż liczba tych zer może dążyć do nieskończoności. Dlatego skorzystamy z innego zestawu warunków stabilności, które to zostaną użyte w dalszej części artykułu. Zestawy tych warunków podane są poniżej, odpowiednio dla wersji różniczkowej i dyskretniej LRP.

Lemat 5 [11] *Różniczkowy LRP (6) jest stabilny wzdłuż pasa wtedy i tylko wtedy gdy następujące warunki są spełnione:*

- $\rho(A_{22}) < 1$
- $\text{Re}(\rho(A_{11})) < 0$
- *wszystkie wartości własne $G(s) = A_{21}(sI - A_{11})^{-1}A_{12} + A_{22}$ gdy $s = i\omega$ mają moduły mniejsze od 1 \forall rzeczywistych częstotliwości $\omega \geq 0$.*

gdzie A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} są macierzami modelu stanowego LRP (6).

Równoważny zestaw warunków stabilności wzdłuż pasa mogą zostać zdefiniowane również dla dyskretnych LRP.

Lemat 6 [11] *Dyskretny LRP (8) jest stabilny wzdłuż pasa wtedy i tylko wtedy gdy następujące warunki są spełnione:*

- $\rho(A_{22}) < 1$
- $\rho(A_{11}) < 1$
- *wszystkie wartości własne $G(z) = A_{21}(zI - A_{11})^{-1}A_{12} + A_{22} \forall |z| = 1$ mają moduły mniejsze od 1.*

Oczywistym jest, że sprawdzenie dwóch pierwszych warunków w powyższych twierdzeniach nie sprawia żadnych problemów, gdyż są to znane warunki stabilności dla klasycznych układów 1D. Problemem natomiast jest warunek trzeci, gdyż wymaga obliczeń dla wszystkich punktów (których jest nieskończona liczba) na kole jednostkowym lub dla wszystkich częstotliwości (jeśli rozważać będziemy interpretację tego warunku w dziedzinie częstotliwości). Dlatego też sprawdzenie tego warunku łączy się dużymi problemami natury obliczeniowej. Dodatkowo utrudnieniem jest analiza stabilności procesów z wieloma wejściami i wieloma wyjściami (ang. MIMO - *Multi-Input Multi-Output*). W takim przypadku sprawdzenie warunku trzeciego komplikuje się, gdyż wymaga wyliczenia wartości własnych macierzy transmitancji $G(s)$ lub $G(z)$, która w przypadku MIMO jest macierzą wielomianową, i dla każdej wartości własnej należy wykreślić właściwej charakterystyki. Z tego właśnie powodu ograniczymy się do procesów o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO).

W celu ominięcia wskazanych problemów, poszukiwać musimy metody, która umożliwi nam przekształcenie nieskończonej liczby nierówności (dla wszystkich częstotliwości) zdefiniowanych w dziedzinie częstotliwości w problem ze skończoną liczbą niewiadomych. Oczywiście przekształcenie musi zostać dokonane bez wprowadzania jakiegokolwiek stopnia konserwatywności. Aparatu takiego dostarcza znany lemat Kalman-Yakubowicz-Popov'a ustanawiający równoważność pomiędzy nierównościami zdecydowanymi w dziedzinie częstotliwości a problemem poszukiwania macierzy o znanych rozmiarach spełniających pewne nierówności macierzowe [7]. Problemem pozostaje jednak przekształcenie tej nierówności macierzowej do postaci LMI, umożliwiającej jego rozwiązanie przy pomocy znanych pakietów numerycznych. Zostanie to pokazane w sekcji 4. niniejszego artykułu. Wcześniej jednak zapoznamy się z modelami układów 2D i zależnościami pomiędzy modelami stanowymi LRP i układów 2D.

3. Modele liniowych układów 2D i procesów powtarzalnych

Ponieważ liniowe procesy powtarzalne, jak to już zostało wcześniej wspomniane, są szczególną podklasą liniowych układów 2D to dlatego posiadają wiele strukturalnych podobieństw z tymi układami. Dzięki temu modele Roessera i Fornasinię-Marchesinię mogą zostać użyte do modelowania dyskretnych i różniczkowych procesów powtarzalnych oraz do ich analizy z wykorzystaniem teorii układów dwuwymiarowych. Z drugiej strony, część istniejących rozwiązań dla problemów analizy procesów powtarzalnych może być bezpośrednio zaadaptowanych do analizy układów dwuwymiarowych. Poniżej zostanie pokazane jak model dyskretnego LRP może zostać osadzony w modelu stanowym Roessera lub Fornasinię-Marchesinię, które to używane są opisu układów liniowych 2D. Postępując analogicznie będziemy mogli przekształcić model różniczkowego LRP do postaci ciągle-dyskretnego (hybrydowego) modelu stanowego 2D.

Aby przekształcić model dyskretnego LRP do postaci modelu Roessera należy tylko zdefiniować nowe zmienne

$$\begin{aligned} r &= k + 1, \\ y_k(p) &= v_{k+1}(p) = v_r(p), \end{aligned} \quad (10)$$

aby model stanowy (8) przybrał strukturę równania stanu modelu Roessera podanej poniżej

$$\begin{bmatrix} x_r(p+1) \\ v_{r+1}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r(p) \\ v_r(p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_r(p) \quad (11)$$

Oczywistym jest, że spoglądając na powyższy model możemy stwierdzić iż, wektor profilu pasa $y_k(p)$ pełni rolę pionowego wektora stanu, a wektor stanu pasa $x_{k+1}(p)$ pełni rolę poziomego wektora stanu. Równocześnie, wektor profilu pasa jest bezpośrednio wektorem wyjść, oznaczonym tutaj przez $z_r(p)$

$$z_r(p) = v_r(p) = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r(p) \\ v_r(p) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Równocześnie, modele w przestrzeni stanów liniowych procesów powtarzalnych mogą zostać przekształcone do postaci modelu Fornasinię-Marchesinię. Aby tego dokonać, zdefiniujmy następujące macierze na podstawie modelu dyskretnego LRP

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

oraz rozszerzony wektor stanu

$$\hat{x}(p+1, k+1) = \begin{bmatrix} x_k(p+1) \\ y_k(p) \end{bmatrix}$$

Co więcej, zdefiniujmy wektor wejść jako

$$\hat{u}(p+1, k) = \hat{u}(p, k+1) = u_k(p)$$

i wtedy równanie (8) może zostać rozpisane w następującej postaci

$$\hat{x}(p+1, k+1) = \hat{A}_1 \hat{x}(p, k+1) + \hat{A}_2 \hat{x}(p+1, k) + \hat{B}_1 \hat{u}(p, k+1) + \hat{B}_2 \hat{u}(p+1, k) \quad (14)$$

która jest jedną z form modelu Fornasinię-Marchesinię.

Na podstawie powyższych przekształceń widać, iż model stanowy LRP jest równoważny równaniu stanu modelu Roessera. Dlatego warunki stabilności LRP możemy bezpośrednio zastosować do analizy stabilności układów 2D.

Postępując w analogiczny sposób możemy przekształcić modele stanowe różniczkowych LRP do postaci modeli ciągle-dyskretnych (hybrydowych) układów 2D przedstawionych poniżej

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r(t) \\ v_{r+1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r(t) \\ v_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_r(t) \quad (15)$$

$$\dot{\hat{x}}(t, k+1) = \hat{A}_1 \hat{x}(t, k+1) + \hat{A}_2 \dot{\hat{x}}(t, k) + \hat{B}_1 \hat{u}(t, k+1) + \hat{B}_2 \dot{\hat{u}}(t, k) \quad (16)$$

4. Nowe konieczne i wystarczające warunki stabilności asymptotycznej układów 2D

W niniejszej sekcji przedstawimy główny rezultat prezentowanego artykułu. Mając na uwadze zależności pomiędzy modelami stanowymi LRP a układu 2D oraz znając konieczne i wystarczające warunki stabilności wzdłuż pasa LRP mamy następujący rezultat.

Twierdzenie 1 *Liniowy dyskretny układ 2D jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy gdy istnieją macierze $W, R \succ 0, S \succ 0, Q \succ 0$ oraz symetryczna macierz P takie, że istnieje rozwiązanie poniższych LMIs*

$$A_{22}^T R A_{22} - R \prec 0 \quad (17)$$

$$A_{11}^T S A_{11} - S \prec 0 \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} -P & Q + W^T & 0 & 0 \\ Q + W & P - 2Q - A_{11}^T W^T - W A_{11} & -W A_{12} & A_{21}^T \\ 0 & -A_{12}^T W^T & -I & A_{22}^T \\ 0 & A_{21} & A_{22} & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (19)$$

Dowód 1 *Oczywistym jest, iż nierówności (17) i (18) są bezpośrednim wynikiem zastosowania teorii stabilności Lapunowa dla dyskretnych układów liniowych. Aby otrzymać LMI (19), należy w pierwszej kolejności zaobserwować, iż dla dyskretnego LRP trzeci warunek Lematu 6 jest równoważny nierówności (1) lub (2) dla*

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

opisującej wybrany obszar płaszczyzny zespolonej - w tym przypadku koła jednostkowego - zobacz [7] aby poznać więcej szczegółów. Przyjmując wcześniej opisane oznaczenia macierzy w modelu stanowym Roessera, nierówność (2) może zostać zapisana jako

$$\begin{bmatrix} A_{11}^T & I & 0 \\ A_{12}^T & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P & Q & 0 \\ Q & P - 2Q + A_{21}^T A_{21} & A_{21}^T A_{22} \\ 0 & A_{22}^T A_{21} & A_{22}^T A_{22} - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (20)$$

teraz należy zauważyć, iż powyższa nierówność ma formę pierwszej nierówności w (5). Przyjmując następującą notację

$$\Pi^\perp = \begin{bmatrix} A_{11}^T & I & 0 \\ A_{12}^T & 0 & I \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} -P & Q & 0 \\ Q & P - 2Q + A_{21}^T A_{21} & A_{21}^T A_{22} \\ 0 & A_{22}^T A_{21} & A_{22}^T A_{22} - I \end{bmatrix}$$

otrzymujemy, że

$$\Pi^T = \begin{bmatrix} -I & A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}$$

Konsekwentnie, dla macierzy Σ , która spełnia drugą nierówność (5)), zastosowanie lematu 3 implikuje, że nierówność macierzowa (20) posiada rozwiązanie gdy

$$\begin{bmatrix} -P & Q & 0 \\ Q & P - 2Q + A_{21}^T A_{21} & A_{21}^T A_{22} \\ 0 & A_{22}^T A_{21} & A_{22}^T A_{22} - I \end{bmatrix} - \text{sym}(\Pi W^T \Sigma^T) \prec 0 \quad (21)$$

jest spełnione. Co więcej, nierówność (21) jest zawsze spełniona dla $\Sigma = [0 \ I \ 0]^T$. Zastosowanie uzupełnienia Schur'a do nierówności (21) daje nam w rezultacie LMI (19), co kończy dowód.

W przypadku ciągle-dyskretnego układu 2D mamy następujący rezultat

Twierdzenie 2 Liniowy ciągło-dyskretny (hybrydowy) układ 2D jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy gdy istnieją macierze $W, R \succ 0, S \succ 0, Q \succ 0$ oraz symetryczna macierz P takie, że istnieje rozwiązanie poniższych LMIs

$$A_{22}^T R A_{22} - R \prec 0 \quad (22)$$

$$A_{11}^T S + S A_{11} \prec 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} -Q & P + W^T & 0 & 0 \\ P + W - A_{11}^T W^T - W A_{11} & -W A_{12} & A_{21}^T & 0 \\ 0 & -A_{12}^T W^T & -I & A_{22}^T \\ 0 & A_{21} & A_{22} & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (24)$$

Dowód 2 Dowód może być przeprowadzony w analogiczny sposób jak dla twierdzenia 1. Tym przypadku korzystamy jednak z nierówności (4) jako podstawy całego dowodu.

5. Przykład numeryczny

W niniejszej sekcji zostaną przedstawione dwa przykłady numeryczne w celu zademonstrowania efektywności zaproponowanych warunków stabilności dla liniowych układów 2D.

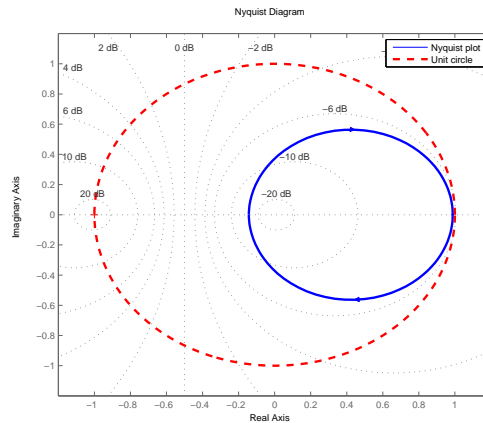
Przykład 1 Rozważmy dyskretny liniowy układ 2D opisany w przestrzeni stanów modelem Roessera z następującymi macierzami

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}, & A_{12} &= \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix} \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}, & A_{22} &= 0.1 \end{aligned} \quad (25)$$

Łatwo obliczyć, że

$$\sigma(A_{11}) = \{0.5742, -0.1742\}, \quad \sigma(A_{22}) = 0.1$$

czyli LMIs (17) i (18) twierdzenia 1 są na pewno spełnione i pozostaje nam sprawdzenie tylko LMI (19). Nierówność ta jest spełniona dlatego rozważany dyskretny układ 2D jest stabilny asymptotycznie. Podkreślić należy, iż powszechnie znane warunki wystarczające stabilności, a przedstawione np. w [10] nie są spełnione w tym przypadku. Charakterystyka Nyquist'a przedstawiona na Rysunku 1 jest potwierdzeniem, że rozważany układ 2D jest stabilny asymptotycznie.



Rys. 1. Wykres Nyquist'a stabilnego asymptotycznie dyskretnego liniowego układu 2D

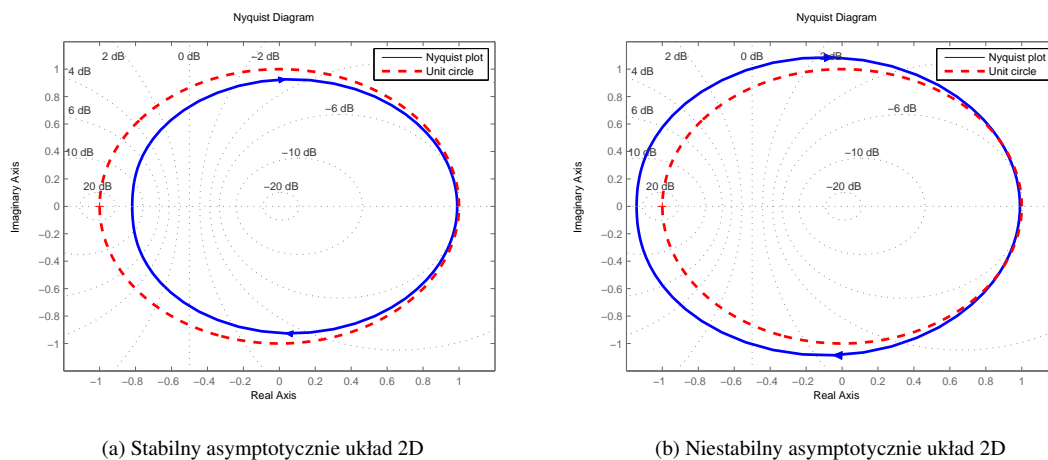
Przykład 2 Rozważmy dyskretno-ciągły liniowy układ 2D opisany w przestrzeni stanów modelem Roessera z następującymi macierzami

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} -2.929 & -0.3186 \\ -0.3186 & -0.8829 \end{bmatrix}, & A_{12} &= \begin{bmatrix} -2.8 \\ -1.3 \end{bmatrix} \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} 1.9 & 0.2 \end{bmatrix}, & A_{22} &= 0.99 \end{aligned} \quad (26)$$

Natychmiast możemy potwierdzić, iż dwa pierwsze warunki Twierdzenia 2 są spełnione gdy

$$\sigma(D_0) = 0.99, \quad \sigma(A) = \{-2.9775, -0.8344\}$$

Równocześnie trzeci warunek jest też spełniony dlatego ciągło-dyskretny układ 2D (26) jest stabilny asymptotycznie, co potwierdzone jest wykresem Nyquist'a na Rysunku 2(a). Jeśli jednak $A_{12} = [-3.3 \quad -1.3]^T$ (co nie



Rys. 2. Wykresy Nyquist'a

ma wpływu na dwie pierwsze nierówności) to taki układ 2D nie będzie już stabilny asymptotycznie ponieważ nierówność (24) nie ma rozwiązania – zobacz również Rysunek 2(b).

6. PODSUMOWANIE

W niniejszym artykule zaprezentowano analizę stabilności liniowych układów dwuwymiarowych z zastosowaniem warunków stabilności opracowanych dla liniowych procesów powtarzalnych. Na podstawie znanego faktu o równoważności stabilności asymptotycznej układów 2D i stabilności wzdłuż pasa LRP, zostało pokazane, że możemy wykorzystać warunki stabilności LRP do analizy stabilności asymptotycznej układów 2D. Równocześnie, korzystając z lematu Kalman-Yakubowicz-Popov'a oraz aparatu liniowych nierówności macierzowych pokazano, że konieczne i wystarczające warunki stabilności asymptotycznej układów dwuwymiarowych mogą sprowadzone do postaci predestynującej je do sprawdzenia przy użyciu znanych pakietów do obliczeń inżynierskich. co więcej, możliwe będzie wykorzystanie przedstawionych rezultatów do rozwiązania problemu syntezy sterownika bądź badania stabilności odpornej. Na zakończenie przedstawiono również przykłady numeryczne ilustrujące wyniki rozwiązań przedstawionych liniowych nierówności macierzowych.

Literatura

- [1] N. K. Bose. *Applied Multidimensional Systems Theory*. Van Nostrand-Reinhold, New York, USA, 1982.
- [2] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 of *SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics*. SIAM, Philadelphia, USA, 1994.
- [3] R. N. Bracewell. *Two-dimensional Imaging*. Prentice Hall Signal Processing Series. Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, USA, 1995.
- [4] D. Ding and G. Yang. Finite frequency \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain discrete-time switched linear systems. *Progress in Natural Science*, 19(11):1625–1633, 2009.
- [5] K. Gałkowski, R. W. Longman, and E. Rogers, editors. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. Special Issue: Multidimensional Systems (nD) and Iterative Learning Control*, volume 13. University of Zielona Góra Press, 2003.
- [6] K. Gałkowski and J. Wood, editors. *Multidimensional Signals, Circuits and Systems*. Systems and Control Book Series. Taylor and Francis, London, England, 2001.
- [7] T. Iwasaki and S. Hara. Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1):41–59, 2005.
- [8] T. Iwasaki and S. Hara. Feedback control synthesis of multiple frequency domain specifications via generalized KYP lemma. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17:415–434, 2007.
- [9] T. Kaczorek. *Two-dimensional Linear Systems*, volume 68 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1985.
- [10] E. Rogers, K. Gałkowski, and D. H. Owens. *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes*, volume 349 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2007.
- [11] E. Rogers and D. H. Owens. *Stability Analysis for Linear Repetitive Processes*, volume 175 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1992.
- [12] H. Wang and G. H. Yang. A finite frequency domain approach to fault detection for linear discrete-time systems. *International Journal of Control*, 81(7):1162–1171, 2008.