

تحلیل استاتیکی ورق رایسنر روی بستر الاستیک دو پارامتره با شرایط مرزی گوناگون

صباح نوبختی^۱، محمد محمدی اقدم^۲^۱ دانشجوی کارشناسی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)؛ sabah1364@aut.ac.ir^۲ دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)؛ aghdam@aut.ac.ir

چکیده

در این تحقیق از روش دیفرانسیل کوادرچر تعمیم یافته^۱ برای تحلیل استاتیکی ورق نازک و ضخیم روی بستر الاستیک دو پارامتره براساس تئوری ورق رایسنر، با شرایط مرزی گوناگون استفاده شده است. براساس تئوری ورق رایسنر، روابط حاکم بر مسأله شامل سه معادله و سه مجهول می باشد. مجهولات عبارت از چرخش در جهت x ، چرخش در جهت y و خیز عمودی ورق می باشد. با اعمال روش GDQ ، دامنه مسأله به $N \times M$ نقطه تقسیم می شود و برای هر کدام از نقاط گره، سه معادله تعادل نوشته می شود. به این ترتیب مسأله شامل $3 \times N \times M$ معادله و برای هر نقطه سه مجهول (در مجموع $3 \times N \times M$ مجهول) می گردد. با اعمال شرایط مرزی به مسأله و گسسته سازی معادلات با ضرایب GDQ ، یک دستگاه خطی معادلات و مجهولات حاصل می شود. پس از حل دستگاه معادلات جبری، نتایج خیز عمودی و چرخش ورق در هر نقطه به دست می آید.

در این پژوهش تمرکز ویژه به قرار گیری ورق روی بستر پسترناک^۲، با ترکیب مختلف از شرایط مرزی لبه ی آزاد^۳ می باشد. پس از بررسی همگرایی پاسخ ها، نتایج برای حالت های مختلف شرایط مرزی ارائه شده است. مزیت روش GDQ در استفاده از تعداد نقاط کمتر گره در مقایسه با روش های عددی مشابه است. به این ترتیب با حجم محاسبات کمتر، پاسخ دقیقی حاصل می شود.

کلمات کلیدی: دیفرانسیل کوادرچر تعمیم یافته، ورق رایسنر، بستر الاستیک دو پارامتره (بستر پسترناک)، تکیه گاه آزاد.

مقدمه

تیرها، پوسته ها و ورق ها از مهم ترین سازه های مهندسی می باشد و در بخش های مختلف صنعت مثل صنایع ساختمان، صنایع دریایی، صنایع هوایی و فضایی، ماشین آلات صنعتی و غیره کاربرد گسترده ای دارد. به همین دلیل، شاخه ای از دانش مهندسی به نام مقاومت مصالح یا مکانیک مواد، به بررسی خصوصیات این سازه ها و سایر سازه های مهندسی می پردازد. به طوری که در طول سال ها، تئوری های مختلفی برای توصیف رفتار این اجزاء به وجود آمده و روش های حل گسترده ای هم برای تحلیل این سازه ها تحت بارگذاری های مختلف استفاده شده است. در میان همه ی

تئوری هایی که برای ورق ضخیم استفاده می شود، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول که اولین بار توسط رایسنر ابداع شد و بعدها برای مسائل دینامیکی توسط میندلین توسعه پیدا کرد، مقبولیت زیادی دارد. اساس این روش بر در نظر گرفتن تنش نرمال و تغییر شکل های برشی جانبی استوار است.

یکی از شایع ترین مسائل مهندسی، قرار گرفتن سازه ی مکانیکی روی موادی مانند خاک، فوم یا هر عضو الاستیک دیگر است. به این ترتیب، معادلات حاکم بر مسأله تغییر کرده و خصوصیات بستر هم به آن افزوده می شود. مدل های گوناگونی برای بیان خصوصیات بستر بر مبنای خاصیت الاستیک وجود دارد. از جمله مدل وینکلر [۱] می باشد که به نام مدل بستر الاستیک شناخته می شود. این تئوری بستر را با فنرهای الاستیک مدل کرده و فقط اثر تنش نرمال در بستر را در نظر می گیرد. به همین دلیل حرکت عرضی فنرها مستقل از هم می باشد. با استفاده از مدل وینکلر، دیده می شود که بین نتایج به دست آمده برای خیز در لبه های ورق گسستگی وجود دارد. برای افزایش دقت مدل سازی، مدل های دو پارامتره به وجود آمده است که اثر تنش های برشی در بستر را هم لحاظ می کند. از جمله این مدل ها مدل بستر الاستیک با دو پارامتر یا مدل پسترناک [۲] می باشد.

برای حل معادلات تئوری های مختلف ورق که به صورت معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می باشد، روش های گوناگونی استفاده می شود. به علت محدود بودن دامنه ی روش های تحلیلی در یافتن پاسخ این معادلات، روش های عددی کاربرد گسترده ای در این زمینه دارد. با گسترش کامپیوترها، استفاده از روش های عددی هم که بر مبنای محاسبات عددی پایه ریزی شده، گسترش یافته است. نکته ی مهم در کاربرد روش های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، تقریب زدن تابع یا مشتق آن می باشد. به طوری که هر چه تقریب استفاده شده دقیق تر باشد، پاسخ هم دقیق تر خواهد بود. علاوه بر دقت پاسخ، حجم کمتر محاسبات هم در مقایسه ی روش های عددی با هم قابل توجه است. از جمله ی این روش ها روش اختلاف محدود، روش باقیمانده های وزن دار و روش المان محدود می باشد. در طول سال های اخیر، این روش ها و به خصوص روش المان محدود، گستردگی فراوانی یافته است و در حیطه ی وسیعی از مهندسی که پاسخ تحلیلی برای مسائل وجود ندارد، نقش خود را پر رنگ نموده است. روش های باقیمانده های وزن دار و المان محدود، خود تابع را به ترتیب در کل دامنه و المان هایی از دامنه تقریب می زند. در حالی که روش اختلاف

^۱ Generalized Differential Quadrature (GDQ)^۲ Pasternak foundation^۳ free boundary condition

مسأله به صورت مستطیلی باشد. نکته ی اصلی در DQ ، این است که ضرایب وزنی را برای تقریب هر مرتبه از مشتق تشکیل دهیم.

به دست آوردن ضرایب وزنی از طریق روش های پیشنهادی بلمن با مشکلاتی مواجه است. برای رفع این نقایص، به یک روش مناسب برای پیدا کردن ضرایب وزنی احتیاج است که در انتخاب نقاط گره ای محدودیت نداشته باشد و ضمناً سادگی ظاهری جبری خود را حفظ کند. کوان و چانگ [۷] به جای استفاده از چند جمله ای های توانی و یا چند جمله ای های لژاندر، از چندجمله ای های درون یاب لاگرانژ به جای توابع معیار^۶ استفاده کردند و فرمول بندی صریحی را برای پیدا کردن ضرایب وزنی تقریب مشتق مرتبه اول و دوم ارائه کردند. شو و ریچاردز [۸] روشی را با این مشخصات در ارتباط با حل چند معادله دیفرانسیل در زمینه دینامیک سیالات ارائه کردند که در آن همه ی روش های موجود برای تعیین ضرایب وزنی، با تحلیل تقریب چند جمله ای های مرتبه بالا و تحلیل فضای بردار خطی تعمیم یافته است و به روش دیفرانسیل کوادرچر تعمیم یافته معروف شد. در روش GDQ ، ضرایب وزنی تقریب مشتق مرتبه اول توسط یک رابطه ساده جبری مشخص می شود که محل انتخاب نقاط گره، محدودیتی برای آن ایجاد نمی کند. ضرایب وزنی تقریب مشتقات مرتبه دوم و بالاتر، توسط یک رابطه بازگشتی معرفی می شود. مانند برخی روش های عددی، روش GDQ مشتقات نسبی را گسسته می سازد و معادلات دیفرانسیل پاره ای را به دسته ای از معادلات جبری تبدیل می کند.

برای به دست آوردن ضرایب وزنی، دامنه مستطیلی را در جهت x به N نقطه و در جهت y به M نقطه تقسیم می کنیم. (x_i, y_j) نقطه ای از دامنه مستطیلی است و $i = 1, \dots, N$ و $j = 1, \dots, M$ می باشد. $c_{pq}^{(n)}$ و $\bar{c}_{pq}^{(m)}$ ضرایب وزنی مرتبه n ام و m ام مشتقات نسبی توابع چند متغیره نسبت به x و y هستند. این ضرایب اینگونه به دست می آید.

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{M(x_i)}{(x_i - x_j).M(x_j)}, \quad (1)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N \text{ and } i \neq j,$$

$$\bar{c}_{ij}^{(1)} = \frac{P(y_i)}{(y_i - y_j).P(y_j)}, \quad (2)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, M \text{ and } i \neq j,$$

$$M(x_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (x_i - x_j). \quad (3)$$

$$P(y_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M (y_i - y_j). \quad (4)$$

برای $n, m > 1$ داریم:

Test function ^۶

محدود، مشتق تابع را به وسیله ی آپراتور اختلاف محدود تقریب می زند.

روش GDQ از جمله روش های اختلاف محدود می باشد که کاربرد گسترده ای در حل انواع معادلات با مشتقات جزئی دارد. این روش در سال های ۱۹۷۰ پایه ریزی شد و در سال های دهه ۱۹۹۰ گسترش پیدا کرد. با استفاده از این روش می توان پاسخ معادلات دیفرانسیل جزئی را با تعداد نقاط گره و حجم محاسبات کمتر نسبت به روش های مشابه و با دقت قابل قبول به دست آورد.

با جستجو در مقالات، می توان نمونه هایی را یافت که ورق روی بستر پسترناک را تحلیل کرده اند. از جمله هان [۳] و تئو [۴] به تحلیل استاتیکی و لام [۵] به تحلیل دینامیکی مسأله پرداخته اند. اما در این بررسی ها، نتایج مسأله با شرایط مرزی لبه ی آزاد وجود ندارد. در این پژوهش نتایج به دست آمده برای ورق های با تکیه گاه ساده^۱ و گیردار^۲، با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده است. پس از اعتبارسنجی روش، نتایج مسأله برای ورق با تکیه گاه آزاد ارائه شده است. در نهایت دیده می شود که روش دیفرانسیل کوادرچر تعمیم یافته، روشی توانمند برای حل معادلات دیفرانسیل پاره ای با شرایط مرزی گوناگون می باشد.

روش دیفرانسیل کوادرچر تعمیم یافته

روش دیفرانسیل کوادرچر^۳ توسط بلمن [۶] ابداع شد و به عنوان روشی برای به دست آوردن پاسخ معادلات دیفرانسیل پاره ای با تعداد نقاط گره کم و محاسبات اندک مورد استفاده قرار گرفت. روش DQ مفهوم انتگرال کلاسیک کوادرچر را در بر می گیرد. این روش بر این ایده بنا شده که مشتقات جزئی یک تابع نسبت به یک متغیر فضایی، در یک نقطه ی مجزا که از قبل داده شده است، با مجموع خطی وزنی از مقادیر همان تابع، در تمامی نقاط مجزای دامنه (که نقطه ی اولی یکی از همین نقاط است)، برابر قرار داده می شود. همان طور که می دانیم، روش های امان محدود و اختلاف محدود روش های مرتبه پایین^۴ است. بنابراین برای به دست آوردن پاسخ عددی دقیق، این روش ها نیاز دارد که از تعداد زیادی نقاط گره استفاده کند. روش DQ براساس تقریب مرتبه بالایی^۵ چندجمله ای ها بنا نهاده شده است. بنابراین برای به دست آوردن پاسخ دقیق، احتیاج به تعداد بسیار کمتری نقاط گره در مقایسه با روش های مرتبه پایین دارد، که این نکته خود باعث کوچک تر شدن حجم محاسبات می شود. این روش برای حل مسائل چند بعدی هم تعمیم داده شده است. روش DQ با بالاترین مرتبه ی اختلاف محدود معادل است. بنابراین همانند اختلاف محدود مرتبه پایین، نیاز دارد که دامنه

^۱ simply supported boundary condition

^۲ clamped boundary condition

^۳ Differential Quadrature (DQ)

^۴ low order

^۵ high order

ضخامت آن h است و در لبه های $y=0, b; x=0, a$ روی تکیه گاه قرار دارد. شکل کلی معادلات ورق رایسنر روی بستر پسترناک به این صورت است.

$$\frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_x + (1+\nu) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \kappa Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_y + (1+\nu) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + \kappa Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) = 0, \quad (11)$$

$$\kappa Gh (\nabla^2 w - \phi) + q - p = 0, \quad (12)$$

$$\phi = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}. \quad (13)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (14)$$

در این روابط، ψ_x و ψ_y چرخش های عمودی حول محور های x و y می باشد. D سفتی خمشی ورق، E مدول الاستیسیته، G مدول برشی، ν نسبت پواسون، κ ضریب تصحیح برش برابر با $5/6$ و q فشار عمودی وارد بر ورق است. منتهجه های تنش با روابط زیر بیان می شود.

$$M_x = -D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right), \quad (15)$$

$$M_y = -D \left(\nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right), \quad (16)$$

$$M_{xy} = -\frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right). \quad (17)$$

$$Q_x = \kappa Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right), \quad (18)$$

$$Q_y = \kappa Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right). \quad (19)$$

شرایط مرزی عبارت است از
الف) تکیه گاه گیردار

$$w=0, \quad \psi_x=0, \quad \psi_y=0. \quad (20)$$

ب) تکیه گاه ساده در $x=0, a$

$$w=0, \quad M_x=0, \quad \psi_y=0. \quad (21)$$

ج) تکیه گاه ساده در $y=0, b$

$$w=0, \quad M_y=0, \quad \psi_x=0. \quad (22)$$

د) تکیه گاه آزاد در $x=0, a$

$$M_x=0, \quad M_{xy}=0, \quad Q_x=0. \quad (23)$$

ه) تکیه گاه آزاد در $y=0, b$

$$M_y=0, \quad M_{xy}=0, \quad Q_y=0. \quad (24)$$

نرمال سازی معادلات

معادلات تعادل و منتهجه های تنش را با معرفی پارامترهای زیر می توان نرمال سازی کرد.

$$c_{ij}^{(n)} = n \left(c_{ii}^{(n-1)} \cdot c_{ij}^{(1)} - \frac{c_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right), \quad (5)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N \text{ and } i \neq j.$$

$$\bar{c}_{ij}^{(m)} = m \left(\bar{c}_{ii}^{(m-1)} \cdot \bar{c}_{ij}^{(1)} - \frac{\bar{c}_{ij}^{(m-1)}}{y_i - y_j} \right), \quad (6)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, M \text{ and } i \neq j.$$

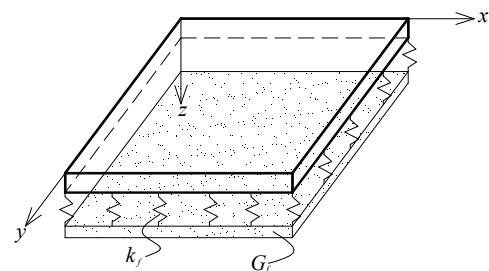
$$c_{ii}^{(n)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij}^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

$$\bar{c}_{ii}^{(m)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \bar{c}_{ij}^{(m)}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (8)$$

معادلات حاکم بر ورق روی بستر پسترناک

ورق به عنوان سازه ای که در آن یک بُعد (ضخامت)، نسبت به دو بعد دیگر بسیار کوچک است و در ابتدا مسطح می باشد، تعریف می گردد. جنس ورق مورد بحث همگن و ایزوتروپ فرض می شود. جنسی که مشخصات فیزیکی آن در نقاط مختلف یکسان است همگن، و جنسی که مشخصات فیزیکی آن در جهت های مختلف یکسان است، ایزوتروپ نامیده می شود. صفحه xy روی سطح میانی ورق و محور z عمود بر آن انتخاب می شود. مؤلفه های تغییر مکان در هر نقطه ورق در جهت های x, y, z به ترتیب با u, v, w نشان داده می شود. وقتی در اثر بار خارجی ورق تغییر شکل می دهد، خیز نقطه مشخصی از صفحه میانی $A(x_a, y_a)$ ، w می باشد.

مدل سازی بستر با روش پسترناک، به این صورت انجام می شود که انتهای فنرهای الاستیک بستر وینکلر، به یک لایه ی تراکم ناپذیر وصل می شود. این لایه فقط با اعمال شدن تنش های برشی دچار تغییر فرم می شود. به این ترتیب، حرکت عرضی فنرها به هم وابسته می شود.



شکل ۱: ورق روی بستر پسترناک

پارامتر k_f ضریب فنریت فنرهای عمودی می باشد و پارامتر G_f ، سختی لایه برشی است. در این مدل، عکس العمل عمودی بستر بر حسب پارامترهای آن به این ترتیب بیان می شود:

$$p = k_f w - G_f \nabla^2 w, \quad (9)$$

که w خیز عمودی ورق و ∇^2 اپراتور لاپلاس می باشد. یک ورق همگن ایزوتروپیک مستطیلی ضخیم که روی بستر الاستیک دو پارامتره قرار دارد را در نظر بگیرید. طول ورق a ، عرض آن b ،

ورق به $N \times M$ نقطه گره تقسیم می شود که N و M تعداد نقاط گره در جهات x و y را مشخص می کند. برای تقسیم بندی دامنه به این تعداد نقاط گره، از صفرهای تابع چبی شیف استفاده می کنیم.

$$x_i = \frac{a}{2} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right\} \quad i=1,2,\dots,N, \quad (38)$$

$$y_j = \frac{b}{2} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{j-1}{M-1} \pi \right) \right\} \quad j=1,2,\dots,M. \quad (39)$$

گسسته سازی معادلات

با اعمال روش GDQ برای گسسته سازی معادلات نتیجه می شود

$$\sum_{k=1}^N c_{ik}^{(2)} \Psi_X(k, j) + \frac{(1-\nu)}{2} \beta^2 \sum_{l=1}^M \bar{c}_{jl}^{(2)} \Psi_X(i, l) - \alpha \Psi_X(i, j) + \frac{(1+\nu)}{2} \beta \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M c_{ik}^{(1)} \bar{c}_{jl}^{(1)} \Psi_Y(k, l) + \alpha \delta \sum_{k=1}^N c_{ik}^{(1)} W(k, j) = 0, \quad (40)$$

$$\frac{(1+\nu)}{2} \beta \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M c_{ik}^{(1)} \bar{c}_{jl}^{(1)} \Psi_X(k, l) + \beta^2 \sum_{l=1}^M \bar{c}_{jl}^{(2)} \Psi_Y(i, l) + \frac{(1-\nu)}{2} \sum_{k=1}^N c_{ik}^{(2)} \Psi_Y(k, j) - \alpha \Psi_Y(i, j) + \alpha \gamma \sum_{l=1}^M \bar{c}_{jl}^{(1)} W(i, l) = 0, \quad (41)$$

$$\left(1 + \frac{G_F}{\alpha} \right) \left(\delta \sum_{k=1}^N c_{ik}^{(2)} W(k, j) + \gamma \beta \sum_{l=1}^M \bar{c}_{jl}^{(2)} W(i, l) \right) - \left(\sum_{k=1}^N c_{ik}^{(1)} \Psi_X(k, j) + \beta \sum_{l=1}^M \bar{c}_{jl}^{(1)} \Psi_Y(i, l) \right) + Q(i, j) - \frac{K_F \delta}{\alpha} W(i, j) = 0. \quad (42)$$

در معادلات بالا (i, j) یک نقطه گره روی ورق است که $i=2, \dots, N-1$ و $j=2, \dots, M-1$ می باشد. $c_{pq}^{(n)}$ و $\bar{c}_{pq}^{(m)}$ ضرایب مرتبه n ام و مرتبه m ام مشتقات نسبی Ψ_X و Ψ_Y نسبت به X و Y می باشد.

گسسته سازی شرایط مرزی

پس از گسسته سازی معادلات تعادل، شرایط مرزی هم باید گسسته شود.

الف) تکیه گاه گیردار در $X=0$

$$W(1, j) = 0, \quad \Psi_X(1, j) = 0, \quad \Psi_Y(1, j) = 0, \quad j=1,2,\dots,M. \quad (43)$$

ب) تکیه گاه ساده در $X=1$

$$W(N, j) = 0, \quad \Psi_Y(N, j) = 0, \quad \sum_{k=1}^N c_{Nk}^{(1)} \Psi_X(k, j) + \beta \nu \sum_{l=1}^M \bar{c}_{jl}^{(1)} \Psi_Y(N, l) = 0, \quad j=1,2,\dots,M. \quad (44)$$

ج) تکیه گاه آزاد در $Y=0$

$$X = \frac{x}{a}, Y = \frac{y}{b}, W = \frac{w}{h}, \Psi_X = \psi_x, \quad \Psi_Y = \psi_y, \quad \beta = \frac{a}{b}, \gamma = \frac{h}{b}, \delta = \frac{h}{a}, Q = \frac{q}{\kappa G h}, \alpha = \frac{6\kappa(1-\nu)}{\delta^2}, \quad (25)$$

$$K_F = \frac{a^4 k_f}{D}, G_F = \frac{a^2 G_f}{D}.$$

با جایگذاری مقادیر بالا در معادلات پایه، سیستم معادلات ما عبارت خواهد بود از

$$\frac{\partial^2 \Psi_X}{\partial X^2} 2 + \frac{(1-\nu)}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 \Psi_X}{\partial Y^2} - \alpha \Psi_X + \frac{(1+\nu)}{2} \beta \frac{\partial^2 \Psi_Y}{\partial X \partial Y} + \alpha \delta \frac{\partial W}{\partial X} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{(1+\nu)}{2} \beta \frac{\partial^2 \Psi_X}{\partial X \partial Y} + \beta^2 \frac{\partial^2 \Psi_Y}{\partial Y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \Psi_Y}{\partial X^2} - \alpha \Psi_Y + \alpha \gamma \frac{\partial W}{\partial Y} = 0, \quad (27)$$

$$\left(1 + \frac{G_F}{\alpha} \right) \left(\delta \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \gamma \beta \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) - \left(\frac{\partial \Psi_X}{\partial X} + \beta \frac{\partial \Psi_Y}{\partial Y} \right) + Q - \frac{K_F \delta}{\alpha} W = 0. \quad (28)$$

منتجه های تنش هم پس از نرمال سازی برابر خواهند شد با

$$M_X = -D \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \Psi_X}{\partial X} + \frac{\nu}{b} \frac{\partial \Psi_Y}{\partial Y} \right), \quad (29)$$

$$M_Y = -D \left(\frac{\nu}{a} \frac{\partial \Psi_X}{\partial X} + \frac{1}{b} \frac{\partial \Psi_Y}{\partial Y} \right), \quad (30)$$

$$M_{XY} = -\frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{1}{b} \frac{\partial \Psi_X}{\partial Y} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi_Y}{\partial X} \right), \quad (31)$$

$$Q_X = \kappa G h \left(\frac{h}{a} \frac{\partial W}{\partial X} - \Psi_X \right), \quad (32)$$

$$Q_Y = \kappa G h \left(\frac{h}{b} \frac{\partial W}{\partial Y} - \Psi_Y \right). \quad (33)$$

شرایط مرزی پس از نرمال سازی عبارت می شود از

الف) تکیه گاه گیردار

$$W = 0, \quad \Psi_X = 0, \quad \Psi_Y = 0. \quad (34)$$

ب) تکیه گاه ساده در $X=0,1$

$$W = 0, \quad \Psi_Y = 0, \quad \frac{\partial \Psi_X}{\partial X} + \beta \nu \frac{\partial \Psi_Y}{\partial Y} = 0. \quad (35)$$

ج) تکیه گاه ساده در $Y=0,1$

$$W = 0, \quad \Psi_X = 0, \quad \nu \frac{\partial \Psi_X}{\partial X} + \beta \frac{\partial \Psi_Y}{\partial Y} = 0. \quad (36)$$

د) تکیه گاه آزاد در $X=0,1$

$$\frac{\partial \Psi_X}{\partial X} + \beta \nu \frac{\partial \Psi_Y}{\partial Y} = 0, \quad \beta \frac{\partial \Psi_X}{\partial Y} + \frac{\partial \Psi_Y}{\partial X} = 0, \quad \delta \frac{\partial W}{\partial X} - \Psi_X = 0. \quad (37)$$

اعمال روش GDQ به معادلات ورق

گسسته سازی دامنه

دیده می شود که برای ورق نازک ($h/a = 0.005$) و ورق ضخیم (سایر موارد)، نتایج به خوبی با نتایج موجود در مراجع مطابقت دارد. سپس همگرایی پاسخ خیز و نیروی برشی و ممان خمشی برای ورق با خصوصیات $K_F = 200, G_F = 20, \nu = 0.3, h/a = 0.1$ تحت بار یکنواخت برای حالات گوناگون شرایط مرزی ساده و گیردار در جدول ۲ آورده می شود.

جدول ۲: همگرایی خیز و نیروی برشی و ممان خمشی ورق مربعی روی بستر پسترناک با شرایط مرزی گوناگون تحت بار یکنواخت

شرایط مرزی	نقاط گره	w^*	M_x^*	Q_x^*
		$X=0.5$	$X=0.5$	$X=0.0$
		$Y=0.5$	$Y=0.5$	$Y=0.5$
cccc	7×7	0.912	1.262	0.341
	9×9	0.913	1.269	0.341
	11×11	0.913	1.277	0.339
	Han [3]	0.913	1.275	0.339
sccc	7×7	1.152	1.224	0.154
	9×9	1.154	1.234	0.156
	11×11	1.154	1.236	0.156
	Han [3]	1.154	1.236	0.156
sscc	7×7	1.186	1.407	0.157
	9×9	1.186	1.416	0.162
	11×11	1.187	1.420	0.162
	Han [3]	1.187	1.419	0.162
sccc	7×7	1.029	1.243	0.152
	9×9	1.030	1.252	0.157
	11×11	1.030	1.257	0.157
	Han [3]	1.030	1.256	0.157
csss	7×7	1.356	1.585	0.393
	9×9	1.358	1.595	0.393
	11×11	1.358	1.597	0.392
	Han [3]	1.358	1.598	0.392

دیده می شود که در تمامی موارد، جواب های به دست آمده از روش GDQ در مقایسه با نتایج موجود در مقالات، از دقت قابل قبولی برخوردار است. یعنی با تعداد کم نقاط گره جواب دقیق حاصل می شود.

در مرحله بعد اعتبارسنجی مدل برای شرایط مرزی لبه آزاد در جدول ۳ انجام می شود. در این تحلیل، ورق ساده-آزاد-ساده-آزاد مربعی، تحت بار یکنواخت مورد بررسی قرار گرفته است. پس از بررسی همگرایی جواب ها برای تعداد نقاط گره متفاوت، در مقادیر مختلف ضرایب بستر، تعداد نقاط بهینه برای به دست آوردن پاسخ دقیق تر ارزیابی می شود. همگرایی خیز نقطه مرکزی ورق مربعی با ترکیب های مختلف از شرط مرزی لبه آزاد در شکل های ۲ و ۳ نشان داده شده است.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_X}{\partial X} + \beta \nu \frac{\partial \Psi_Y}{\partial Y} &= 0, & \beta \frac{\partial \Psi_X}{\partial Y} + \frac{\partial \Psi_Y}{\partial X} &= 0, \\ \delta \frac{\partial W}{\partial X} - \Psi_X &= 0. \end{aligned} \quad (45)$$

روند حل

معادلات حاکم بر ورق روی بستر پسترناک شامل ۳ معادله بوده و سه مجهول خیز عمودی، چرخش در جهت x و چرخش در جهت y دارد. پس از گسسته سازی معادلات توسط روش دیفرانسیل کوادرچر تعمیم یافته، این سه معادله تعادل برای هر نقطه داخل ورق نوشته می شود. برای نقاط روی مرز، فقط شرایط مرزی اعمال می شود. به این ترتیب $3 \times N \times M$ معادله جبری و به همان تعداد مجهول حاصل می شود. با حل دستگاه معادلات فوق، مجهولات مسأله یافت می شود.

نتایج

برای محاسبه ی ضرایب و حل همزمان معادلات جبری، از برنامه MATLAB 7.0 استفاده شده است. برای ساده سازی در نمایش نتایج، از پارامترهای بی بُعد زیر استفاده می شود.

$$w^* = \frac{WD}{qa^4} \times 10^3, \quad M_{x,y,xy}^* = \frac{M_{x,y,xy}}{qa^2} \times 10^2, \quad Q_{x,y}^* = \frac{Q_{x,y}}{qa} \quad (46)$$

در ابتدا کارایی روش در حل معادلات ورق های نازک ($h/a = 0.005$) و ضخیم ($h/a = 0.1, 0.2$) بررسی می شود. برای نمونه، یک ورق مربعی با تکیه گاه ساده (ssss) تحت بار یکنواخت و با پارامترهای بستر گوناگون، بررسی می شود. مشاهده می شود که نتایج خیز و ممان خمشی M_x در نقطه ی میانی ورق، با افزایش نقاط گره به سرعت همگرا می شود. همچنین نتایج به دست آمده با تعداد نقاط گره کم (11×11)، به خوبی با نتایج موجود در مقالات و نتایج ورق نازک مطابقت می کند. پارامتر بستر $K_F = 200$ و نسبت پواسون $\nu = 0.25$ در نظر گرفته می شود.

جدول ۱: همگرایی خیز نقطه ی میانی ورق مربعی روی بستر پسترناک با

تکیه گاه ساده تحت بار یکنواخت

h/a	نقاط گره	$G_F = 5$	$G_F = 20$
		w^*	w^*
0.005	7×7	2.2593	1.5619
	9×9	2.2640	1.5675
	11×11	2.2640	1.5676
	Han [3]	2.2640	1.5676
0.100	7×7	2.3089	1.5821
	9×9	2.3136	1.5872
	11×11	2.3137	1.5873
	Han [3]	2.3137	1.5874
0.200	7×7	2.4450	1.6380
	9×9	2.4495	1.6418
	11×11	2.4495	1.6419
	Han [3]	2.4495	1.6419

در شکل های ۳ و ۴، روند همگرایی پاسخ به خوبی دیده می شود. مشاهده می شود که با تعداد نقاط گره کم نتایج به سرعت همگرا شده و با 9×9 نقطه گره جواب دقیق حاصل می شود.

با بررسی جدول ۳ مشخص می شود که نتایج به دست آمده برای ورق با لبه ی آزاد، هر چند به دقت نتایج ورق با لبه های ساده و گیردار نیست، ولی از دقت قابل قبولی برخوردار است. قابل ذکر است که هر چه پارامترهای بستر افزایش می یابد، دقت نتایج به دست آمده هم بیشتر می شود. در پارامترهای کوچکتر بستر، نتایج روش GDQ در بیشترین حالت ۲٪ با مقادیر ذکر شده در مرجع شماره ۵ تفاوت دارد. با بررسی نتایج جدول ۳ مشخص می شود که در مجموع، محاسبه با تعداد نقطه گره 9×9 از کمترین خطا برخوردار است. به همین دلیل، نتایج سایر حالت های ورق با لبه ی آزاد با استفاده از تعداد نقاط گره 9×9 ذکر می شود. در جدول ۴ نتایج خیز و منتهجه های تنش ورق مربعی نازک و ضخیم با ترکیب مختلف شرایط مرزی لبه آزاد و پارامترهای مختلف بستر ارائه می شود.

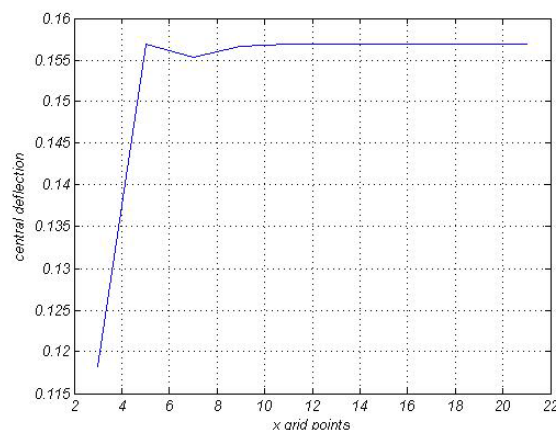
جدول ۴: نتایج خیز و منتهجه های تنش ورق مربعی تحت بار یکنواخت

$$(a/b = 1, \nu = 0.3, h/a = 0.1)$$

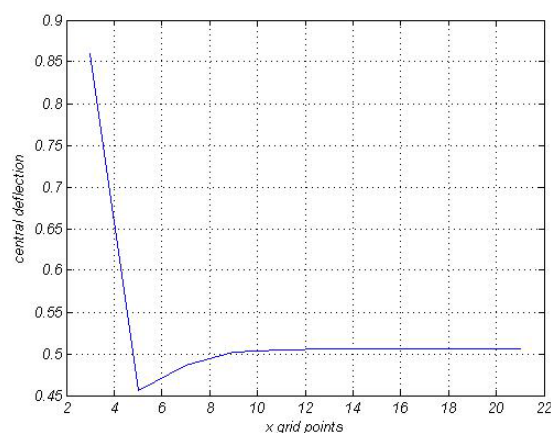
			w^*	M_x^*	Q_y^*
شرایط مرزی	G_F	h/a	$X=0.5$ $Y=0.5$	$X=0.5$ $Y=0.5$	$X=0.5$ $Y=0.0$
cccf	$K_F = 100$				
	5	0.005	1.4971	1.3211	0.5015
		0.100	1.6854	1.2715	0.4020
	30	0.005	1.0535	0.8520	0.4863
		0.100	1.1612	0.7975	0.3829
	$K_F = 300$				
	5	0.005	1.2093	1.0943	0.4349
		0.100	1.3272	1.0287	0.3486
	30	0.005	0.8989	0.7395	0.4370
		0.100	0.9751	0.6825	0.3426
ccff	$K_F = 100$				
	5	0.005	3.3576	0.9996	2.2832
		0.100	3.5428	0.9394	0.0044
	30	0.005	2.8785	0.7835	2.3068
		0.100	3.0372	0.7035	0.0044
	$K_F = 300$				
	5	0.005	1.8075	0.9604	1.2524
		0.100	1.8933	0.9001	0.0024
	30	0.005	1.5474	0.6965	1.2678
		0.100	1.6138	0.6347	0.0024

جدول ۳: همگرایی خیز و نیروی برشی و ممان خمشی ورق مربعی $sfsf$ تحت بار یکنواخت ($a/b = 1, \nu = 0.3, h/a = 0.1$)

K_F	G_F	نقاط گره	w^*	M_x^*	Q_x^*
			$X=0.5$	$X=0.5$	$X=0.0$
			$Y=0.5$	$Y=0.5$	$Y=0.5$
1	1	7×7	12.210	11.100	0.436
		9×9	12.200	11.060	0.426
		11×11	12.200	11.080	0.430
		Lam [5]	11.890	11.100	0.421
	3 ^d	7×7	1.587	1.313	0.103
		9×9	1.591	1.325	0.099
		11×11	1.591	1.325	0.100
		Lam [5]	1.571	1.334	0.101
3 ^d	1	7×7	6.747	6.004	0.286
		9×9	6.743	5.987	0.279
		11×11	6.745	5.994	0.282
		Lam [5]	6.663	6.094	0.276
	3 ^d	7×7	1.429	1.169	0.099
		9×9	1.432	1.181	0.095
		11×11	1.433	1.181	0.096
		Lam [5]	1.417	1.190	0.097

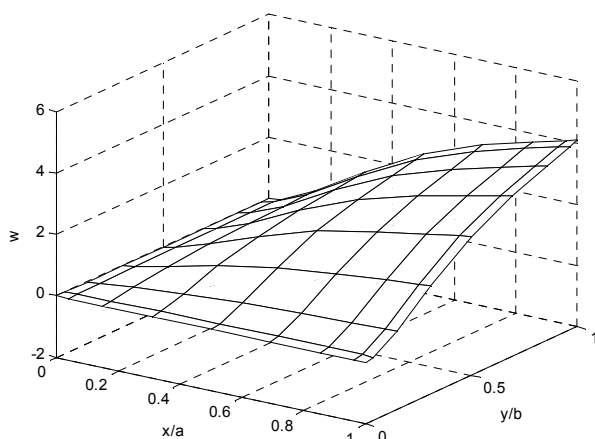


شکل ۲: همگرایی خیز نقطه مرکزی ورق مربعی $sssf$

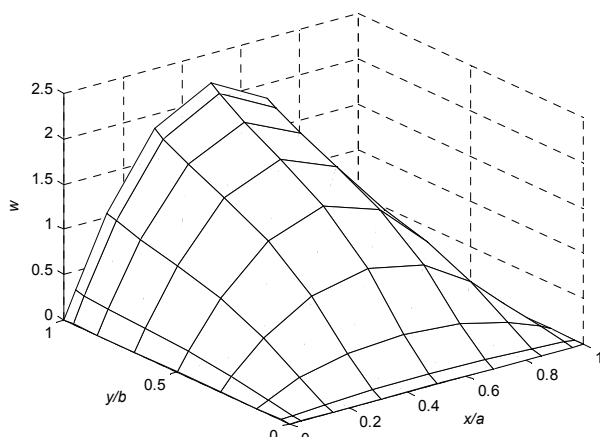


شکل ۳: همگرایی خیز نقطه مرکزی ورق مربعی $sfff$

در ادامه کانتور خیز عمومی ورق مربعی با شرایط مرزی گوناگون و خصوصیات ($K_F = 300, G_F = 30, \nu = 0.3, h/a = 0.1$) در شکل های ۴ تا ۶ نمایش داده می شود.

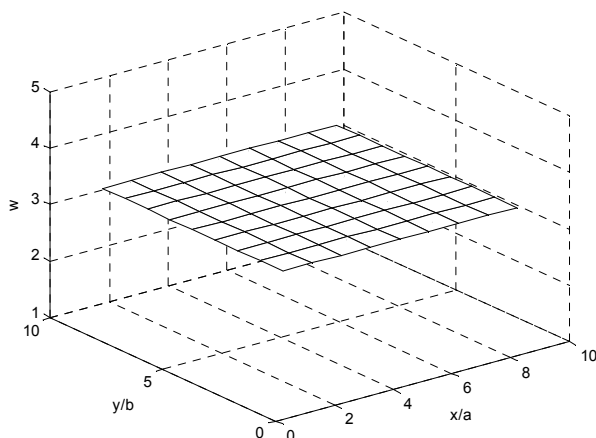


شکل ۴: نمایش خیز عمومی ورق $ccff$ تحت بار گسترده



شکل ۵: نمایش خیز عمومی ورق $scsf$ تحت بار گسترده

همچنین تحلیل برای ورق با چهار شرط مرزی لبه ی آزاد انجام شد. در نتایج به دست آمده، دیده می شود که همه ی نقاط ورق، دارای خیز یکسان می باشد که دلیل دیگر صحت نتایج است.



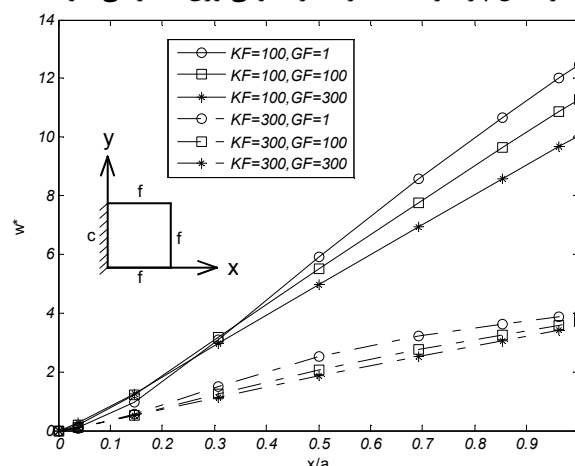
شکل ۶: نمایش خیز عمومی ورق $ffff$ تحت بار گسترده

ادامه جدول ۴: نتایج خیز و منتهای تنش ورق مربعی تحت بار یکنواخت ($a/b = 1, \nu = 0.3, h/a = 0.1$)

شرایط مرزی	G_F	h/a	w^*	M_x^*	Q_y^*
			$X=0.5$	$X=0.5$	$X=0.5$
			$Y=0.5$	$Y=0.5$	$Y=0.0$
$cfcf$	$K_F = 100$				
	5	0.005	1.9417	0.7746	0.4684
		0.100	2.1456	0.7411	0.4279
	30	0.005	1.3672	0.4719	0.4873
		0.100	1.4858	0.4427	0.4263
	$K_F = 300$				
	5	0.005	1.4798	0.5898	0.3948
		0.100	1.5916	0.5481	0.3549
	30	0.005	1.1169	0.3863	0.4264
		0.100	1.1928	0.3559	0.3678
$cfff$	$K_F = 100$				
	5	0.005	5.7875	0.1355	18.6902
		0.100	5.0964	0.1491	0.1002
	30	0.005	5.6986	0.1341	15.3444
		0.100	5.7761	0.1396	0.0751
	$K_F = 300$				
	5	0.005	2.4140	0.2165	5.5106
		0.100	2.4675	0.2066	0.0165
	30	0.005	2.2453	0.1529	4.2477
		0.100	2.2872	0.1440	0.0111
$scsf$	$K_F = 100$				
	5	0.005	3.0939	1.7626	-
		0.100	3.2473	1.6729	-
	30	0.005	1.7785	1.0088	-
		0.100	1.8462	0.9309	-
	$K_F = 300$				
	5	0.005	1.9873	1.2909	-
		0.100	2.0571	1.2073	-
	30	0.005	1.3436	0.8233	-
		0.100	1.3832	0.7546	-

- [4]- Teo, T. M., Liew, K. M., "Differential cubature method for analysis of shear deformable rectangular plates on Pasternak foundation," Int. J. Mechanical Science, Vol. 44, pp. 1179-1194, 2002.
- [5]- Lam, K. Y., Wang, C. M., He, X. Q., "Canonical exact solution for Levy-plates on two-parameter foundation using Green's functions," Int. J. engineering structures, Vol. 22, pp. 364-378, 2000.
- [6]- Bellman, R.E., Casti, J., "Differential Quadrature and long term integration," J. Mathematical Analysis and Applications. Vol. 34, pp. 235-238, 1971.
- [7]- Quan, J.R., Chang, C.T., "New insights in solving distributed system equations by the quadrature methods," I. Analysis. Computers and chemical Engineering, Vol. 13, pp. 779-788, 1989.
- [8]- Shu, C., Richards, B.E., "High resolution of natural convection in a square cavity by generalized differential Quadrature, Advances in Numeric Methods in Engineering: Theory and Applications," Proc. 3rd Int. Conference, Swansea, pp. 978-985, 1990.

در شکل ۷ بین اثر پارامترهای مختلف بستر روی خیز عمومی ورق مقایسه ای صورت گرفته است. در این بررسی از ورق مربعی $cfff$ تحت بار گسترده با خصوصیات $(\nu = 0.3, h/a = 0.1)$ استفاده شده است. منحنی خیز در محل $Y = 0.5$ روی ورق نمایش داده شده است. ملاحظه می شود که اثر تغییر پارامتر K_F روی خیز بسیار بیشتر از تغییر پارامتر G_F می باشد. همچنین دیده می شود که با بیشتر شدن پارامترهای بستر، خیز عمومی ورق کمتر می شود.



شکل ۷: نمایش خیز در لایه $Y = 0.5$ روی ورق $cfff$

نتیجه گیری و جمع بندی

دیده می شود که روش دیفرانسیل کوادرچر تعمیم یافته، در حل معادلات دیفرانسیل جزئی روشی بسیار کارآمد است. در این روش با حجم کم محاسبات، نتایج دقیق حاصل می شود. همچنین نتایج به دست آمده برای شرایط مرزی لبه آزاد در این پژوهش ارائه شد و براساس پارامترهای بستر، مورد بررسی قرار گرفت.

فهرست علائم و اختصارات

DQ	دیفرانسیل کوادرچر
GDQ	دیفرانسیل کوادرچر تعمیم یافته
s	تکیه گاه ساده
f	تکیه گاه آزاد
c	تکیه گاه گیردار

مراجع

- [1]- Winkler E., "Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit," Prag, Dominicus, 1867.
- [2]- Pasternak, P. L., "On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants," Gps. Izd. Lit. po Strait. i Arkh. (in Russian), 1954.
- [3]- Han J. B., Liew, K. M., "Numerical Differential Quadrature method for Reissner/Mindlin plates on two-parameter foundations," Int. J. Mech. Sci., Vol. 39(9), pp. 977-989.