システム制御情報学会論文誌，Vol. 18, No. 11, pp. 393–399, 2005

論　文

ユニモジュラな連続時間パラエルミート多項式行列のスペクトル分解アルゴリズム*

金子　修[†]・Paolo Rapisarda[‡]・鷹羽　浄嗣[§]

An Algorithm for the Spectral Factorization of Unimodular Para-Hermitian Polynomial Matrices in Continuous Time*

Osamu KANEKO[†], Paolo RAPISARDA[‡] and Kiyotsugu TAKABA[§]

In this paper, we address an algorithm for the spectral factorization of para-Hermitian unimodular polynomial matrices in the continuous time case. Most of the algorithms for the spectral factorizations of matrix polynomials depend on the existence of the roots of given polynomial matrices, so it is almost impossible to execute the spectral factorization of unimodular polynomial matrices. In this paper, we provide a new algorithm for the spectral factorization of unimodular polynomial matrices without the existence of the roots of polynomial matrices or the stability. The task one has to do is only to solve a linear matrix inequality consisting of the coefficients of a given unimodular matrix, which can be achieved easily by the use of numerical computation packages. The algorithm we present here is based on the property of the storage functions for the dissipative systems in which there always exists positive dissipated energy for the environment. This implies that the fundamental property in our algorithm is also a self-standing interesting result with respect to theoretical points of view. Finally, in order to show the validity of our results, we give an illustrative example with respect to numerical aspects.

1.　はじめに

まず，本論文でとり扱う問題を定式化する．$Z(\xi)\in\mathbb{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\xi]$[1]を以下の条件

(1). $Z(\xi)=Z(-\xi)^{\mathrm{T}}$

(2). $Z(j\omega)\geq 0$

(3). $Z(\xi)$ は $\mathbb{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\xi]$ 上のユニモジュラ行列

を満たす多項式行列とする．このとき，次の条件

(a). $Z(\xi)=D(-\xi)^{\mathrm{T}}D(\xi)$

(b). $D(\xi)\in\mathbb{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}$ はユニモジュラ行列

を満たす $D(\xi)$ を求める問題を考える[2]．通常の多項式行列のスペクトル分解では，$Z(\xi)$ はユニモジュラではなく虚軸に対して対称の位置に存在する根の対をもつパラエルミート行列を扱うが，ここでは，そのような根が存在しない場合のスペクトル分解となっている．

よく知られているように，多項式行列や有理関数行列のスペクトル分解は，その理論的な背景が消散性をはじめとした動的システムの重要な性質と深く関連するということから，制御理論，システム理論，回路理論，信号処理理論の分野において古くから多くの研究がなされてきた ([1,18] など)．有理関数行列のスペクトル分解は本質的に多項式行列のスペクトル分解を基礎としているので [19]，特に多項式行列におけるアルゴリズムを考究していくことは重要であり，多岐にわたる研究が報告されている ([2–5,10,12,14,16,17,19] など)．これらの研究で提示されたアルゴリズムは，そのほとんどがユニモジュ

* 原稿受付　2005年3月10日

† 大阪大学　大学院　基礎工学研究科　Graduate School of Engineering Science, Osaka University; 1-3 Machikaneyamacho, Toyonaka city, Osaka 560-8531, JAPAN

‡ サザンプトン大学　電気・コンピュータサイエンス学科 School of Electronics and Computer Science, University Southampton; SO17 1BJ, United Kingdom

§ 京都大学　大学院　情報学研究科　Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics, Kyoto University; Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, JAPAN

Key Words: spectral factorization, polynomial matrices, two-variable polynomial matrices, unimodular matrices, dissipativeness.

[1]表記については付録を参照のこと．

[2]後述するように，ユニモジュラ多項式行列 $Z(\xi)$ がこのように適当なユニモジュラ行列 $D(\xi)$ と $D(-\xi)^{\mathrm{T}}$ との積で表されるというスペクトル分解可能性は参考文献 [10] ですでに保証されているとする．

ラ行列には対応不可能である．たとえば，代表的なスペクトル分解アルゴリズムであるSymmetric Extraction[2]などを用いて通常の (根を持つ) スペクトル分解を行うと，共通因子を左右からくくることが基本的方針であり，最終的には中央にユニモジュラ行列を残してしまい共通因子をくくることができなくなる．また，参考文献 [16] に端を発した非線形計画法による微分方程式の解法に基づく方法 [4] においても，数値アルゴリズムの収束性が各ステップで現れるスペクトル因子の安定性に依存している．参考文献 [3] や [19] の Toeplitz 行列や Hankel 行列による方法においても，与えられた行列の係数行列から構成される線形方程式の解からスペクトル因子を得る方法を提案しているが，この線形方程式の可解性が，やはりスペクトル因子の安定性 (または反安定性) に依存している．多項式システム理論の一般化という立場から考えると，根をもつ場合と同様に，ユニモジュラな多項式行列のスペクトル分解に関してもそのアルゴリズムを開発しておくことは重要である．一方，J スペクトル分解ではあるが，参考文献 [10] において，[2] の方法を発展させたユニモジュラスペクトル分解の解法が得られているが，行次数や列次数の調整，最高次数の係数行ベクトルから作られる定数行列の正則化など，煩雑な手続きを必要としており，有用な手法とはいえない．したがって，実用的な観点からも，より簡潔な方法で汎用性のあるアルゴリズムの開発が望ましいであろう．

このような観点から，本論文では連続時間でのユニモジュラなパラエルミート多項式行列のスペクトル分解のアルゴリズムを与える．基本的には参考文献 [14](連続時間) や [5](離散時間) とほぼ同様に二変数多項式行列に基づいた消散不等式の蓄積関数の性質に着目した方法である．しかし，これまでは，これらの方法も最大/最小の蓄積関数が反安定/安定なスペクトル因子から誘導される消散率に対応するという性質に立脚していたため，ユニモジュラな行列に対する適用は不可能とされてきた．しかしながら，消散システムにおける供給率がある性質を満たすときに蓄積関数が唯一しか存在しない，という理論的結果を導出することにより，結果的には [14] や [5] と同様に与えられた多項式行列の係数行列から構成される線形行列不等式の解を求めるのみでよい，というシンプルなアルゴリズムで実行可能であることを示す．これは，数値計算 CAD パッケージが普及している昨今の状況においては，実用的な観点から非常に有効な結果を与えたともいえよう．同時に，参考文献 [14] や [5] の結果が，より汎用性の高いスペクトル分解のアルゴリズムである，という一般性を証明したことにもなる．そして，それら以上に本論文の結果は，消散システムにおける蓄積関数に関する重要な性質を解き明かしているという点で理論的にみても興味深い成果をあげたといえる．

本論文の構成は以下のとおりである．続く第 **2** 章では，本論文で必要になるいくつかのシステム理論，二変数多項式行列とそれから誘導される QDF, そして消散性に関する基本的な結果を示す．第 **3** 章では，主要結果の一つとして，供給率がある性質をもつときに，蓄積関数が満たす性質を示す．そして，それらをもとにして連続時間のユニモジュラ多項式行列のスペクトル分解のアルゴリズムを与える．第 **4** 章では，得られた成果の妥当性を検証するために，数値例をあげる．最後に第 **5** 章では，まとめを述べる．

2. 準備

2.1 二変数多項式行列と QDF

$\mathbb{R}^{\mathtt{p}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ を二変数 ζ, η をもつ $\mathtt{p}\times\mathtt{w}$ の実係数二変数多項式行列の集合とする．$\Phi(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ に対し，$\Phi(\zeta,\eta)=\Phi(\eta,\zeta)^{\mathrm{T}}$ を満たすような集合を $\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ で表す．$\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ の任意の元 $\Phi(\zeta,\eta)=\sum_{(k,l)=(0,0)}\Phi_{k,l}\zeta^k\eta^l$ は，その級数の和について

$$\mathtt{N}(\Phi):=\left\{\min\ n\in\mathbb{Z}\ \text{s.t.}\ \Phi_{k,l}=0,{}^{\forall}k,l>n\right\} \tag{1}$$

のように上限となる整数をもつ．すなわち，$\Phi(\zeta,\eta)=\sum_{(k,l)=(0,0)}^{(\mathtt{N}(\Phi),\mathtt{N}(\Phi))}\Phi_{k,l}\zeta^k\eta^l$ である．

$\Phi(\zeta,\eta)=\sum_{(k,l)=(0,0)}^{(\mathtt{N}(\Phi),\mathtt{N}(\Phi))}\Phi_{k,l}\zeta^k\eta^l\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ に対し，η と ζ をそれぞれ $w\in\mathfrak{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ と w^{T} に対する微分演算子とすると，$\Phi(\zeta,\eta)$ は $Q_\Phi:\mathfrak{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})\mapsto(\mathbb{R})^{\mathbb{R}}$ で定義される Quadratic Differential Form (以降，QDF と略する)

$$Q_\Phi(w)(t):=\sum_{(k,l)=(0,0)}^{(\mathtt{N}(\Phi),\mathtt{N}(\Phi))}\left(\left(\frac{d^k w}{dt^k}\right)^{\mathrm{T}}\Phi_{k,l}\left(\frac{d^l w}{dt^l}\right)\right)(t) \tag{2}$$

を誘導する．$\Phi(\zeta,\eta)$ が別の $\Psi(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ により $(\zeta+\eta)\Psi(\zeta,\eta)=\Phi(\zeta,\eta)$ と表されたとする．ζ や η が行および列ベクトルに作用する微分演算子であることを考えれば，誘導される QDF は $Q_\Phi=dQ_\Psi/dt$ となる．

$\Phi(\zeta,\eta)=\sum_{k,l=(0,0)}^{(\mathtt{N}(\Phi),\mathtt{N}(\Phi))}\Phi_{k,l}\zeta^k\eta^l\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ に対し，各項の係数となる行列から構成される以下の定数行列

$$\tilde{\Phi}:=\begin{bmatrix}\Phi_{0,0} & \Phi_{0,1} & \cdots & \Phi_{0,\mathtt{N}(\Phi)}\\ \Phi_{0,1}^{\mathrm{T}} & \Phi_{1,1} & \cdots & \Phi_{1,\mathtt{N}(\Phi)}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \Phi_{0,\mathtt{N}(\Phi)}^{\mathrm{T}} & & \cdots & \Phi_{\mathtt{N}(\Phi),\mathtt{N}(\Phi)}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{(\mathtt{N}(\Phi)+1)\mathtt{w}\times(\mathtt{N}(\Phi)+1)\mathtt{w}} \tag{3}$$

を定義する．$\tilde{\Phi}$ を以降では $\Phi(\zeta,\eta)$ の係数行列とよぶ．

$\Phi(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ に対して，$\tilde{\Phi}=\tilde{W}^{\mathrm{T}}\Omega_\Phi\tilde{W}$ とし，$\tilde{W}\in\mathbb{R}^{\mathtt{r}(\tilde{\Phi})\times(\mathtt{N}(\Phi)+1)\mathtt{w}}$ が行フルランク，$\Omega_\Phi\in\mathbb{R}^{\mathtt{r}(\tilde{\Phi})\times\mathtt{r}(\tilde{\Phi})}$ が正則になるように分解できる．これより，$W(\xi):=\tilde{W}\begin{bmatrix}I_{\mathtt{w}} & \xi I_{\mathtt{w}} & \cdots & \xi^{\mathtt{N}(\Phi)}I_{\mathtt{w}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{\mathtt{r}(\tilde{\Phi})\times\mathtt{w}}[\xi]$ を定義すると

$$\Phi(\zeta,\eta)=W(\zeta)^{\mathrm{T}}\Omega_\Phi W(\eta) \tag{4}$$

のように表現できる．(4) 式の分解を正準分解，$W(\xi)$ を正準因子という [13,15]．なお，一つの $\Phi(\zeta,\eta)$ に対して

正準因子は唯一ではない．

$\Phi(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ から誘導された Q_Φ が，任意の $w\in\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ および任意の時刻 $t\in\mathbb{R}$ に対し，$Q_\Phi(w)(t)\geq 0$ を満たすときに，$\Phi(\zeta,\eta)\geq 0$ と表す．また，

$$\Phi(\zeta,\eta)\geq 0 \Leftrightarrow \tilde{\Phi}\geq 0 \tag{5}$$

のように，係数行列の準正定性と等価であることも容易に示せる [15]．さらに，$\Phi(\zeta,\eta)\geq 0$ かつ $Q_\Phi(w)=0$ ならば $w=0$ のときに $\Phi(\zeta,\eta)>0$ と表すと，[15] で示されているように，これは $\Phi(\zeta,\eta)=W(\zeta)^{\mathrm{T}}W(\eta)$ と正準分解でき，$W(\xi)$ がすべての複素数で列フルランクであることと等価である．

2.2 QDF に基づく消散性

まず，動的システムを $\Sigma=(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{q}},\mathfrak{B})$ で表すとしよう．$\mathbb{R}$ はシステムの動特性を考える時間軸，$\mathbb{R}^{\mathtt{q}}$ はシステムがとりうる信号空間，そして，$\mathfrak{B}\subseteq(\mathbb{R}^{\mathtt{q}})^{\mathbb{R}}$ をシステムがとりうるトラジェクトリの集合でビヘイビアとよぶ [11]．システム Σ が線形・時不変・有限次元，そして，ビヘイビアの意味で可制御なときに，すべての複素数で列フルランクな多項式行列 $M(\xi)\in\mathbb{R}^{\mathtt{q}\times\mathtt{w}}[\xi]$ を用いて，任意の $w\in\mathfrak{B}$ が $w=M(d/dt)\ell$ で表現可能であるという事実が得られている [11]．なお，$\ell\in(\mathbb{R}^{\mathtt{w}})^{\mathbb{R}}$ はシステムのラテント変数とよばれる．以降の議論では，システムは線形・時不変・有限次元・可制御であるとする．

以上の準備のもとに，システム Σ が供給率に対し消散的であることの定義 [15,13] を以下に与える．

【定義 1】 $\Sigma=(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{q}},\mathfrak{B})$ に対し，$\Phi(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{q}\times\mathtt{q}}[\zeta,\eta]$ により誘導された $Q_\Phi(w)$ が任意の $^\forall w\in\mathfrak{B}\cap\mathfrak{D}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{q}})$ に対して $\int_{-\infty}^{\infty}Q_\Phi(w)dt\geq 0$ を満たすとき，システム Σ は供給率 Q_Φ に対して消散的であるという．

この定義は，(コンパクトサポートをもつ) トラジェクトリ w に沿ったエネルギー供給量を $Q_\Phi(w)$ で評価したときに実質的なエネルギー供給が存在したことを意味する．システムが $w=M(d/dt)\ell$ なる数式表現を持つときに，$\Phi'(\zeta,\eta):=M(\zeta)^{\mathrm{T}}\Phi(\zeta,\eta)M(\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ とすれば，上で定義した消散性は，任意の $\ell\in\mathfrak{D}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ に対し $\int_{-\infty}^{\infty}Q_{\Phi'}(\ell)dt\geq 0$ の成立と等価である．したがって，以下では，一般性を失うことなく，$\Phi(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ の供給率に対して $(\mathbb{R}^{\mathtt{w}})^{\mathbb{R}}$ の全空間をビヘイビアとして扱い，ℓ を w として議論する．そして，単に "Q_Φ が消散的である" ということにする．

この設定のもとで蓄積関数と消散率を以下で定義する [15]．

【定義 2】 $\Phi(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ により誘導された供給率 Q_Φ を考える．

- $\Psi(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ から誘導された Q_Ψ が任意の $w\in\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ に対し $\dfrac{d}{dt}Q_\Psi(w)\leq Q_\Phi(w)$ を満たすとき，Q_Ψ を Q_Φ に対する蓄積関数という．
- $\Delta(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ から誘導された Q_Δ が任意の $w\in\mathfrak{D}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ に対し $\int_{-\infty}^{\infty}Q_\Phi(w)dt=\int_{-\infty}^{\infty}Q_\Delta(w)dt$，および $\Delta(\zeta,\eta)\geq 0$ であるときに，Q_Δ を Q_Φ に対する消散率という．

なお，消散率の定義の前半部に関して，任意の $w\in\mathfrak{D}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ についての $\int_{-\infty}^{\infty}Q_\Phi(w)dt=\int_{-\infty}^{\infty}Q_\Delta(w)dt$ の成立と

$$\Phi(-\xi,\xi)=\Delta(-\xi,\xi) \tag{6}$$

は等価である [15]．そして，与えられた供給率に対し消散率と蓄積関数の関係が以下のとおりに示される [15]．

【定理 1】 $\Phi(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ が供給率 Q_Φ を誘導すると仮定する．このとき，次の四条件は等価である．

(a). Q_Φ が消散的である．

(b). $\Phi(-j\omega,j\omega)\geq 0,\ ^\forall\omega\in\mathbb{R}$.

(c). Q_Φ に対する蓄積関数が存在する．

(d). Q_Φ に対する消散率が存在する．

$\Psi(\zeta,\eta)$ と $\Delta(\zeta,\eta)$ から誘導される蓄積関数 Q_Ψ と消散率 Q_Δ の間には，任意の $w\in\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ について

$$\frac{d}{dt}Q_\Psi(w)=Q_\Phi(w)-Q_\Delta(w) \tag{7}$$

または等価的に

$$(\zeta+\eta)\Psi(\zeta,\eta)=\Phi(\zeta,\eta)-\Delta(\zeta,\eta) \tag{8}$$

のような一対一の関係が存在する．

3. 主要結果

本論文で提示するユニモジュラ多項式行列のスペクトル分解のアルゴリズムは後述する**定理 4** であるが，そのために必要な消散性に関する性質を以下で与えていく．

3.1 蓄積関数の唯一性について

まず，本論文で根幹をなす蓄積関数の性質を示す．

【定理 2】 $\Phi(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ が供給率 Q_Φ を誘導し，Q_Φ が消散的であるとする．さらに，$\Phi(-\xi,\xi)$ を $\mathbb{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\xi]$ 上のユニモジュラ行列とする．このとき，Q_Φ の蓄積関数は (したがって，消散率も) 唯一である．

(証明) まず，**定理 1** から，この Q_Φ が消散的であることから，蓄積関数と消散率が存在することもわかる．$\Phi(-\xi,\xi)$ のユニモジュラ性から，$\Phi(-\xi,\xi)=D(-\xi)^{\mathrm{T}}D(\xi)$ で，$D(\xi)$ をユニモジュラとできるスペクトル分解が可能である [10]．このとき，$\Delta(\zeta,\eta):=D(\zeta)^{\mathrm{T}}D(\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ が，(6) 式および $\Delta(\zeta,\eta)\geq 0$ を満たすことは容易にわかる．したがって $\Delta(\zeta,\eta)$ から誘導される Q_Δ は Q_Φ に対する消散率となり，$\Psi_u(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ を対応する蓄積関数を誘導するとして，任意の $w\in\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ に対し

$$\frac{d}{dt}Q_{\Psi_u}(w)=Q_\Phi(w)-\left\|D\left(\frac{d}{dt}\right)w\right\|^2 \tag{9}$$

なる消散関係の等式を得る．ここで，$\Delta'(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$

を他の任意の消散率とし，$H(\xi)\in\mathbb{R}^{\mathtt{p}\times\mathtt{w}}(\xi)$ をその正準因子とする．$Q_{\Delta'}$ に対応する蓄積関数を $\Psi(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ で誘導されるとして任意の $w\in\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ に対し

$$\frac{d}{dt}Q_\Psi(w)=Q_\Phi(w)-\left\|H\left(\frac{d}{dt}\right)w\right\|^2 \tag{10}$$

なる消散関係を得る．(10) 式を (9) 式から差し引くことにより任意の $w\in\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ に対し

$$\frac{d}{dt}Q_{\bar\Psi}(w)=\left\|H\left(\frac{d}{dt}\right)w\right\|^2-\left\|D\left(\frac{d}{dt}\right)w\right\|^2 \tag{11}$$

を得る．ここで $\bar\Psi(\zeta,\eta):=\Psi_u(\zeta,\eta)-\Psi(\zeta,\eta)$ である．$D(\xi)$ のユニモジュラ性を用いると

$$\bar\Psi_D(\zeta,\eta):=D(\zeta)^{-\mathrm{T}}\bar\Psi(\zeta,\eta)D(\eta)^{-1}\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta],$$
$$N(\xi):=H(\xi)D(\xi)^{-1}\in\mathbb{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\xi]$$

であることから $d:=D(\frac{d}{dt})w$ を定義すると，やはり $d\in\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ になるので (11) 式は任意の $d\in\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ について

$$\frac{d}{dt}Q_{\bar\Psi_D}(d)=\left\|N\left(\frac{d}{dt}\right)d\right\|^2-\|d\|^2 \tag{12}$$

の成立と等価になる．さらに，d の任意性より (12) 式は

$$(\zeta+\eta)\bar\Psi_D(\zeta,\eta)=N(\zeta)^{\mathrm{T}}N(\eta)-I_{\mathtt{w}} \tag{13}$$

とも等価であるので，$\zeta=-\xi,\eta=\xi$ とすると

$$N(-\xi)^{\mathrm{T}}N(\xi)-I_{\mathtt{w}}=0_{\mathtt{w}} \tag{14}$$

を得る．ここで，$N(\xi)=\sum_{i=0}^{\mathtt{d}(N)}N_i\xi^i$ と表現されるとして，(14) 式を展開して ξ に関する恒等式とみなすと

$$\begin{cases} N_0^{\mathrm{T}}N_0=I_{\mathtt{w}} \\ N_0^{\mathrm{T}}N_1-N_1^{\mathrm{T}}N_0=0_{\mathtt{w}} \\ N_0^{\mathrm{T}}N_2-N_1^{\mathrm{T}}N_1+N_2^{\mathrm{T}}N_2=0_{\mathtt{w}} \\ \vdots \\ N_{\mathtt{d}(N)-2}^{\mathrm{T}}N_{\mathtt{d}(N)}-N_{\mathtt{d}(N)-1}^{\mathrm{T}}N_{\mathtt{d}(N)-1}+N_{\mathtt{d}(N)}^{\mathrm{T}}N_{\mathtt{d}(N)-1}=0_{\mathtt{w}} \\ N_{\mathtt{d}(N)-1}^{\mathrm{T}}N_{\mathtt{d}(N)}-N_{\mathtt{d}(N)}^{\mathrm{T}}N_{\mathtt{d}(N)-1}=0_{\mathtt{w}} \\ N_{\mathtt{d}(N)}^{\mathrm{T}}N_{\mathtt{d}(N)}=0_{\mathtt{w}} \end{cases} \tag{15}$$

の $2\mathtt{d}(N)$ 本の式の関係を得る．まず，(15) 式の最下段の式から $N_{\mathtt{d}(N)}=0_{\mathtt{p}\times\mathtt{w}}$ が成立することがわかる．この $N_{\mathtt{d}(N)}=0_{\mathtt{p}\times\mathtt{w}}$ を用いると，最下段から 3 番目，すなわち $N(-\xi)^{\mathrm{T}}N(\xi)$ の $2\mathtt{d}(N)-2$ 次の係数行列の関係より，$N_{\mathtt{d}(N)-1}^{\mathrm{T}}N_{\mathtt{d}(N)-1}=0_{\mathtt{w}}$ の関係を得るので，$N_{\mathtt{d}(N)-1}=0_{\mathtt{p}\times\mathtt{w}}$ を得る．このような手順をふみ，i を偶数として $N(-\xi)^{\mathrm{T}}N(\xi)$ の $2\mathtt{d}(N)-i$ 次の係数行列の関係より，$N_j=0_{\mathtt{p}\times\mathtt{w}}$, $j=1,2,\cdots,\mathtt{d}(N)$ を得る[1]．そして，残された (15) 式の第一等式から N_0 が正規直交行列になることがわかる．また，この関係を (12) に代入すると $(\zeta+\eta)\bar\Psi_D(\zeta,\eta)=0_{\mathtt{w}}$ を得るが，これは任意の $d\in\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ 上で $\frac{d}{dt}Q_{\bar\Psi_D}(d)=0$ を意味する．$D(\xi)$ のユニモジュラ性を使えば，これは任意の $w\in\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ 上で

$$\frac{d}{dt}Q_{\bar\Psi}(w)=0 \tag{16}$$

となるので，(16) 式の関係を (11) 式に代入すると，任意の $w\in\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ に対し，

$$\left\|H\left(\frac{d}{dt}\right)w\right\|^2-\left\|D\left(\frac{d}{dt}\right)w\right\|^2=0 \tag{17}$$

となり，$H(\zeta)^{\mathrm{T}}H(\eta)=D(\zeta)^{\mathrm{T}}D(\eta)$ を得る．これは，消散率が唯一であることを意味しており，**定理 1** で述べた一対一の関係から蓄積関数も唯一となる． □

（注意 1） 上の証明中で，$H(\zeta)^{\mathrm{T}}H(\eta)=D(\zeta)^{\mathrm{T}}D(\eta)$ を得たが，これは $H(\xi)=D(\xi)$ ということではない．一般には，$H(\xi)$ と $D(\xi)$ の間には，$U(-\xi)^{\mathrm{T}}U(\xi)=I_{\mathtt{w}}$ の関係を満たすような $U(\xi)\in\mathbb{R}^{\mathtt{p}\times\mathtt{w}}[\xi]$ が存在して $H(\xi)=U(\xi)D(\xi)$ なる関係が存在する．さらに，証明中で $N(-\xi)^{\mathrm{T}}N(\xi)=I_{\mathtt{w}}$ となる行列が $N(\xi)=N_0$ と表されることより明らかなように，そのような $U(\xi)$ は定数行列であることもわかる．

（注意 2） $H(\xi)$ の行のサイズに関しても，証明中では一般に $\mathtt{w}$ と異なるように $\mathtt{p}$ とおいたが，実は $\mathtt{p}=\mathtt{w}$ となる．これは以下のように示せる．まず，$\mathtt{p}<\mathtt{w}$ の場合は $H(\xi)$ のノーマルランクが $\mathtt{w}$ 未満であることを意味しており，$H(-\xi)^{\mathrm{T}}H(\xi)=D(-\xi)^{\mathrm{T}}D(\xi)=\Phi(-\xi,\xi)$ で，$\Phi(-\xi,\xi)$ のユニモジュラ性に矛盾する．次に $\mathtt{p}>\mathtt{w}$ の場合は $H(\xi)$ は縦長になり，$H(\zeta)^{\mathrm{T}}H(\eta)$ の二変数多項式行列としての係数行列は定数行列 $\tilde H:=\begin{bmatrix}H_0 & H_1 & \cdots & H_{\mathtt{d}(H)}\end{bmatrix}$ の積の形で $\tilde H^{\mathrm{T}}\tilde H$ のように表現される．一方，$D(\zeta)^{\mathrm{T}}D(\eta)$ の係数行列に関しても同様に $\tilde D:=\begin{bmatrix}D_0 & D_1 & \cdots & D_{\mathtt{d}(D)}\end{bmatrix}$ として $\tilde D^{\mathrm{T}}\tilde D$ と表現される．なお，明らかなように，$\mathtt{d}(H)=\mathtt{d}(D)$ である．定数行列としてのランクを考えれば，$D(\xi)$ のサイズが $\mathtt{w}\times\mathtt{w}$ であることより $\mathtt{r}(\tilde D^{\mathrm{T}}\tilde D)=\mathtt{w}$ であるので，$\tilde D^{\mathrm{T}}\tilde D=\tilde H^{\mathrm{T}}\tilde H$ を考えれば，$\mathtt{r}(\tilde H^{\mathrm{T}}\tilde H)=\mathtt{w}$ とならなければならない．二変数多項式行列の正準因子の行サイズは定数行列のランクなので，結局 $H(\xi)$ の行サイズも $\mathtt{w}$ である．

以下，**定理 2** の物理的な観点からの示唆について考察しておく．供給率 Q_Φ に対して，蓄積関数が唯一になるのは，無損失 [15]，すなわち，$\Phi(-\xi,\xi)=0_{\mathtt{w}}$ の場合と，ここで述べた $\Phi(-\xi,\xi)$ がユニモジュラの場合である．前者の無損失に関しては，エネルギーが消散しない，すなわち必ずエネルギーが蓄えられる性質である．一方，後者の本論文での場合は，$D(\xi)$ がユニモジュラであること

[1] なお，i を奇数として $N(-\xi)^{\mathrm{T}}N(\xi)$ の $2\mathtt{d}(N)-i$ 次の係数行列は，$2\mathtt{d}(N)-i+1$ 次の係数行列により得た結果から自明に成立する恒等式になる．

からすべての複素数で列フルランクな多項式行列であり，**2**章の最後で述べた事柄より，$\Delta(\zeta,\eta)=D(\zeta)^{\mathrm{T}}D(\eta)>0$，すなわち，消散率が $Q_\Delta(w)=0$ となるのは自明な零信号のみで，それ以外は必ずエネルギーが外部に消散する場合になる．これは，エネルギー散逸の観点から考えると，物理的に両極端な場合において蓄積関数が唯一であり，他の場合は無数に存在することを示唆している．この事実は理論的に見て興味深く，この点のさらなる深い考察は今後の展望といえる．

（注意 3） 離散時間の場合に関しては，著者らの参考文献 [8] で示したようにユニモジュラの場合でも複数の蓄積関数が存在し，その中でも最大のものがユニモジュラなスペクトル因子から誘導される消散率に対応する蓄積関数になる．議論はここでの連続時間とは異なるので，証明などの詳細は参考文献 [8] や [9] を参照されたい．

3.2 蓄積関数を誘導する二変数多項式行列の係数行列のサイズ

前節の**定理 2** から，与えられた $Z(\xi)\in\mathbb{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\xi]$ に対するユニモジュラスペクトル因子を得るには $Z(\xi)=\Phi(-\xi,\xi)$ となる $\Phi(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ から誘導される供給率を考え，その消散不等式を満たす (唯一の) 蓄積関数に対応する消散率を求めればよい．その際に，蓄積関数を誘導する二変数多項式行列の係数行列のサイズを知る必要がある．そのために有用な以下の定理をあげる．

【定理 3】 **定理 2** で得られる蓄積関数が $\Psi_u(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ で誘導されるとする．このとき，$\mathtt{N}(\Psi_u)<\mathtt{N}(\Phi)$ である．

（証明） $\Phi(\zeta,\eta)=W(\zeta)^{\mathrm{T}}\Omega_\Phi W(\eta)$ と $\Psi_u(\zeta,\eta)=F(\zeta)^{\mathrm{T}}\Omega_{\Psi_u}F(\eta)$ をおのおのの正準分解の一つとする．まず，$W(\xi)$ がノーマル列フルランクでないとすると，$\Phi(-\xi,\xi)=W(-\xi)^{\mathrm{T}}\Omega_\Phi W(\xi)$ もノーマルランクが $\mathtt{w}$ 未満になるので，$\Phi(-\xi,\xi)$ のユニモジュラ性に反する．したがって，$W(\xi)$ はノーマル列フルランクである．さらに，$W(\xi)$ がある複素数 $\lambda_0\in\mathbb{C}$ で列フルランク性が成り立たないとすると，$\det(\Phi(-\xi,\xi))$ が $(\xi-\lambda_0)^i$ と $(\xi+\lambda_0)^i$ なる因子 (i は自然数) をもつことになり，これもユニモジュラ性に矛盾する．したがって，$W(\xi)$ はすべての複素数で列フルランクである．このとき，一般性を失うことなく，$W(\xi)=\left[U(\xi)^{\mathrm{T}}\ Y(\xi)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ のように分割し，$U(\xi)$ を正則，$Y(\xi)U(\xi)^{-1}$ をプロパーにすることができる．正準因子のこのような分解が可能ならば，参考文献 [13] または [15] の結果を用いれば，$F(\xi)U(\xi)^{-1}$ が厳密にプロパーであることがいえる．そして，ある適当な $E(\xi)\in\mathbb{R}^{\mathtt{r}(\tilde{\Psi}_u)\times\mathtt{w}}[\xi]$ と $g(\xi)\in\mathbb{R}[\xi]$ が存在し，

$$F(\xi)U(\xi)^{-1}=\frac{E(\xi)}{g(\xi)}$$

のように表現し

$$\mathtt{d}(E)<\mathtt{d}(g) \tag{18}$$

とできる．すなわち $F(\xi)g(\xi)=E(\xi)U(\xi)$ となるが，この等式の次数に着目すると

$$\mathtt{d}(Fg)=\mathtt{d}(F)+\mathtt{d}(g)=\mathtt{d}(EU)\le\mathtt{d}(E)+\mathtt{d}(U) \tag{19}$$

となる．(18) 式と (19) 式に着目すれば

$$\mathtt{d}(F)<\mathtt{d}(U) \tag{20}$$

を得る．また，明らかに $\mathtt{d}(U)=\mathtt{d}(W)$ であり，正準因子の作り方より，$\mathtt{d}(W)=\mathtt{N}(\Phi)$ でもあるので，$\mathtt{d}(U)=\mathtt{N}(\Phi)$ となる．$\Psi_u(\zeta,\eta)$ と $F(\xi)$ に関しても同様に $\mathtt{d}(F)=\mathtt{N}(\Psi_u)$ がいえるので (20) 式より $\mathtt{N}(\Psi_u)<\mathtt{N}(\Phi)$ がいえる． □

（注意 4） なお，離散時間の場合には，連続時間の場合と違い任意の蓄積関数における上の $F(\xi)U(\xi)^{-1}$ の厳密プロパー性が成立するとは限らない [6,7]．したがって，この性質の証明には注意が必要となる [8]．

3.3 ユニモジュラ行列に対するスペクトル分解のアルゴリズム

定理 2 と，(5) 式で表された等価関係を用いれば，$Z(\xi)\in\mathbb{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\xi]$ に対して，$Z(\xi)=\Phi(-\xi,\xi)$ となる $\Phi(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ が誘導する供給率に対する消散不等式

$$\Phi(\zeta,\eta)-(\zeta+\eta)\Psi(\zeta,\eta)\ge 0$$

の係数行列の不等式を，$\Psi(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}_s^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ の係数行列 $\tilde{\Psi}$ を未知行列として解けばよいこともわかる．なお，**定理 3** によって，$\mathtt{N}(\Psi)$ は上限 $\mathtt{N}(\Phi)-1$ をもつこともわかるので，未知行列 $\tilde{\Psi}$ のサイズもあらかじめ $\mathtt{N}(\Phi)\mathtt{w}\times\mathtt{N}(\Phi)\mathtt{w}$ と決めておくことができる．

以上の議論より，ユニモジュラ行列のスペクトル分解のアルゴリズムが以下のように得られる．

【定理 4】 $Z(\xi)=\sum_{i=0}^{\mathtt{n}}Z_i\xi^i\in\mathbb{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\xi]$ を与えられたパラエルミートなユニモジュラ多項式行列とする．この行列に対し，

$$\Phi(\zeta,\eta)=\frac{1}{2}(Z(\zeta)^{\mathrm{T}}+Z(\eta))\in\mathbb{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta] \tag{21}$$

を定義する．つぎに，未知行列を $P=P^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{\mathtt{nw}\times\mathtt{nw}}$ として，以下の線形行列不等式をたてる．

$$\Gamma(P):=\tilde{\Phi}-\begin{bmatrix}0_{\mathtt{w}\times\mathtt{nw}} & 0_{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}\\ P & 0_{\mathtt{nw}\times\mathtt{w}}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0_{\mathtt{nw}\times\mathtt{w}} & P\\ 0_{\mathtt{w}\times\mathtt{w}} & 0_{\mathtt{w}\times\mathtt{nw}}\end{bmatrix}\ge 0 \tag{22}$$

以上の準備のもとで，以下の性質が成立する．

1). (22) 式は唯一解 (P_u としよう) をもつ．

2). $\mathtt{r}(\Gamma(P_u))=\mathtt{w}$，すなわち，行フルランクな定数行列 $\tilde{D}\in\mathbb{R}^{\mathtt{w}\times(\mathtt{n}+1)\mathtt{w}}$ が存在して $\Gamma(P_u)=\tilde{D}^T\tilde{D}$ のように分解できる．

3). $D(\xi):=\tilde{D}\left[I_{\mathtt{w}}\ \xi I_{\mathtt{w}}\ \cdots\ \xi^{\mathtt{n}}I_{\mathtt{w}}\right]^{\mathrm{T}}$ のように構成した $D(\xi)\in\mathbb{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\xi]$ は $Z(\xi)$ のユニモジュラなスペクトル因子となる．

（証明） $\mathtt{n}=\mathtt{N}(\Phi)$ となることとこれまでの議論より明らかである． □

4. 例題

得られた結果の妥当性をみるために例題を挙げて検証する．以下のようなパラエルミートな行列を考えよう．

$$Z(\xi)=\begin{bmatrix} 2-\xi^2 & 1-\xi \\ 1+\xi & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

これが，$\mathbb{R}^{2\times2}[\xi]$ 上でユニモジュラであることは容易に確認できる．$\mathbb{R}_s^{2\times2}[\zeta,\eta]$ のもとで，一変数多項式行列にしたときに $Z(\xi)$ になるものの候補として $\Phi(\zeta,\eta)=\frac{1}{2}(Z(\zeta)^{\mathrm{T}}+Z(\eta))$ を選び，その係数行列 $\tilde{\Phi}$ は

$$\tilde{\Phi}=\begin{bmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \Phi_{02} \\ \Phi_{01}^{\mathrm{T}} & 0_2 & 0_2 \\ \Phi_{02}^{\mathrm{T}} & 0_2 & 0_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

と表せる (ただし，$\Phi_{ij}\in\mathbb{R}^{2\times2}$)．つぎに，未知行列

$$P=\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^{\mathrm{T}} & P_3 \end{bmatrix}$$

を導入し (22) 式の線形行列不等式をたてると

$$\Gamma(P)=\begin{bmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01}-P_1 & \Phi_{02}-P_2 \\ \Phi_{01}^{\mathrm{T}}-P_1 & -P_2-P_2^{\mathrm{T}} & -P_3 \\ \Phi_{02}^{\mathrm{T}}-P_2^{\mathrm{T}} & -P_3 & 0_{2\times2} \end{bmatrix}\geq 0 \tag{25}$$

となる．右下の 2×2 ブロックが零行列なので，不等式が成立するためには $\Phi_{02}=P_2$ と $P_3=0_2$ となる必要がある．未知行列の残された P_1 に関しては，p_{ij} を $P_1\in\mathbb{R}^{2\times2}$ の i,j 要素とし，(25) 式の左上 4×4 ブロックの不等式を着目すると，行列の構造から，先と同様な理由により $p_{22}=0$ かつ $p_{12}=-\frac{1}{2}$ であることがわかる．さらに，(25) 式の左上 3×3 ブロックに着目しシルベスターの慣性則などより $p_{11}=-1$ も成立することがわかる．結局 $\Gamma(P)\geq 0$ は

$$P_u:=\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

を唯一解としてもち，定数行列 $\Gamma(P_u)$ は

$$\tilde{D}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

として，$\Gamma(P_u)=\tilde{D}^{\mathrm{T}}\tilde{D}$ のように分割できる．したがって，スペクトル分解は

$$D(\xi)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+\xi & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

のように得られる．実際に，この $D(\xi)$ がユニモジュラ行列であることが確かめられ，$\partial\Phi(\xi)=D(-\xi)^{\mathrm{T}}D(\xi)$ も確認できる．

また，Matlab や Scilab などの数値計算 CAD パッケージを用いれば (25) 式の解を求めると

$$P_u:=\begin{bmatrix} -0.999070 & -0.499999 & -0.499999 & 0.000000 \\ -0.499999 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ -0.499999 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix} \tag{29}$$

となる．これは，(26) 式の P_u と比較すると，誤差が最大 10^{-4} のオーダ差で正確に求められていることがわかる．さらに，ユニモジュラスペクトル因子は

$$D'(\xi)=\begin{bmatrix} -0.541499+0.383327\xi & 0.382469 \\ -1.306437-0.923613\xi & -0.923968 \end{bmatrix} \tag{30}$$

のように得られる．これも，$D(\xi)$ と同様に $Z(\xi)$ のスペクトル因子となっていること，およびユニモジュラ行列であることが確認できる．

5. おわりに

本論文では，連続時間のユニモジュラな多項式行列のスペクトル分解のアルゴリズムを導出した．得られた結果は，与えられた多項式行列から構成される線形行列不等式を解き最大解を求めることが主要なタスクであり，解析的に，または，近年発達してきているこの種の問題に対応可能な数値計算 CAD パッケージを援用することで数値的にも容易に求めることができる．また，ここでのアルゴリズム構築のために，消散システムにおいて重要な役割を演じる蓄積関数の性質についても考察した．

今後は，本文中でも述べたように，エネルギーが無損失または必ず消散する場合について蓄積関数が唯一であるという事実を理論的に考究していく．また，本アルゴリズムの根幹をなしているこのような消散性に関するいくつかの結果がすでに離散時間の場合について得られているが [9]，連続時間に拡張する際の理論的な問題を克服することが課題である．さらに，本論文の結果の応用例も示す必要もある．たとえば，多項式システム理論における特異最適制御問題においてはユニモジュラ行列のスペクトル分解が必要になるので [8,9]，そのような場面での本論文の適用例を示すことも必要であろう．

最後に，第一著者が日頃お世話になっている大阪大学基礎工学研究科教授藤井隆雄先生に謝意を表します．

参 考 文 献

[1] B. D. O. Anderson, K. L. Hitz and N. D. Diem: Recursive algorithm for spectral factorization; *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-21, pp. 742–750 (1974)

[2] F. M. Callier: On polynomial spectral factorization by symmetric extraction; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 30, pp. 453–464 (1985)

[3] P. Delsarte, Y. Genin and Y. Kamp: A simple approach to spectral factorization; *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, Vol. 25, pp. 943–946 (1978)

[4] J. Jezek and V. Kucera: Efficient algorithm for matrix spectral factorization; *Automatica*, Vol. 21, pp. 663–669 (1985)

[5] O. Kaneko and T. Fujii: Discrete time average positivity and spectral factorization in a behavioral framework; *Syst. and Contr. Lett.*, Vol. 39, pp. 31–44 (2000)

[6] O. Kaneko and T. Fujii: When is a storage function a state function in discrete time?; *SIAM Journal on Contr. and Optimiz.*, Vol. 42, pp. 1327–1347 (2003)

[7] 金子，藤井: ビヘイビアアプローチに基づく動的システムの消散性理論— QDF をベースとして; システム/制御/情報，Vol. 46, No. 5, pp. 171–177 (2004)

[8] O. Kaneko, P. Rapisarda and K. Takaba: On totally dissipative systems and unimodular spectral factorizations; *Proc. of 16th Internat. Symp. on Mathematical Theory of Network and Systems (MTNS 2004)*, CD-ROM (2004)

[9] O. Kaneko, P. Rapisarda and K. Takaba: Totally dissipative systems; *Syst. and Contr. Lett.*, Vol. 54, pp. 705–711 (2005)

[10] H. Kwakernaak and M. Sebek: Polynomial J-spectral farctorization; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 39, No. 2, pp. 315–328 (1994)

[11] J. W. Polderman and J. C. Willems: *Introduction to Mathematical Systems Theory, A Behavioral Approach*, Springer Verlarg (1997)

[12] V. M. Popov: *Hyperstability of Control Systems*, Springer Verlarg (1973)

[13] H. L. Trentelman and J. C. Willems: Every storage function is a state function; *Syst. and Contr. Lett.*, Vol. 39, pp. 31–44 (1997)

[14] R. van der Geest and H. L. Trentelman: Kalman-Yakubovich -Popov Lemma in a behavioural framework; *Syst. and Contr. Lett.*, Vol. 32, pp. 283–290 (1997)

[15] J. C. Willems and H. L. Tremtelman: On quadratic differential forms; *SIAM Journal on Contr. and Optimiz.*, Vol. 36, No. 5, pp. 1703–1749 (1998)

[16] G. Wilson: Factorization of the covariance generating function of a pure moving average process; *SIAM Journal on Numer. Anal.*, Vol. 6, pp. 1–7 (1969)

[17] V. A. Yakubovich: Factorization of symmetric matrix polynomials; *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 194, pp. 171–189 (1970)

[18] D. C. Youla: On the factorization of rational matrices; *IRE Trans. Inform. Theor.*, Vol. 7, pp. 171–189 (1961)

[19] D. C. Youla and N. N. Kazanjian: Bauer type factorization of positive matrices and theory of matrix polynomials orthogonal on the unit circle; *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, Vol. 25, pp. 57–69 (1978)

付 録

付録 1. 表記

まず，$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ をおのおの実数，複素数，整数の集合とする．サイズが $\mathtt{p}\times\mathtt{w}$ の実数行列の集合は $\mathbb{R}^{\mathtt{p}\times\mathtt{w}}$ で表す．サイズが $\mathtt{w}$ の単位行列を $I_{\mathtt{w}}$，サイズが $\mathtt{p}\times\mathtt{w}$ の零行列を $0_{\mathtt{p}\times\mathtt{w}}$ で表し，後者に関して正方な場合には単に $0_{\mathtt{w}}$ で表す．$\mathbb{R}^{\mathtt{p}\times\mathtt{w}}[\xi]$ を $\mathtt{p}\times\mathtt{w}$ の実係数多項式行列の集合とする．$A\in\mathbb{R}^{\mathtt{p}\times\mathtt{w}}$ に対し，$\mathtt{r}(A)$ をそのランクとする．また，$A(\xi)\in\mathbb{R}^{\mathtt{p}\times\mathtt{w}}[\xi]$ に対し，$\mathtt{d}(A)$ を最高次数とする．$\mathbb{R}$ を定義域，$\mathbb{R}^{\mathtt{w}}$ を値域とする関数の集合を $(\mathbb{R}^{\mathtt{w}})^{\mathbb{R}}$ で表記する．$(\mathbb{R}^{\mathtt{w}})^{\mathbb{R}}$ の部分集合で $\mathfrak{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ を無限回微分可能な関数の集合とし，$\mathfrak{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ の部分集合の中で $\mathfrak{D}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\mathtt{w}})$ をコンパクトサポートをもつ関数の集合とする．