

CABRI I VISUALITZACIÓ

Núria Gorgorió i Keith Jones

Universitat Autònoma de Barcelona i University of Southampton.

L'arribada de poderosos paquets informàtics ha coincidit amb un interès renovat per tota mena de representacions visuals en matemàtiques. Per això fa falta precisar la interpretació que fem del processament visual necessari per a la resolució de problemes matemàtics que impliquen fenòmens visuals. El processament visual implica l'habilitat per manipular mentalment i transformar representacions visuals i imatgeria visual. Aquest escrit descriu tres elements del procés de visualització: visualització simple, visualització com a lectura d'informació visual i processament visual. Presentem exemples de com un paquet integrat de geometria dinàmica del tipus Cabri Géomètre necessita de la visualització alhora que contribueix al seu desenvolupament en els tres sentits esmentats.

Les representacions visuals en matemàtiques ens proporcionen experiències essencials d'objectes i conceptes matemàtics abstractes. Mentre que durant la major part del segle vint la matemàtica ha estat essencialment algebraica, l'arribada de poderosos paquets informàtics ha coincidit amb un interès renovat per noves formes de representació visual. Podríem predir que aquest potencial gràfic dels ordinadors tindrà una influència significativa positiva en el progrés de les matemàtiques (National Research Council 1990, Science and Engineering Research Council 1991).

Aquest sentiment enlloc és tan viu com en el cas de la geometria que ja no és senzillament la descripció matemàtica de determinats aspectes de l'espai físic. Amb l'evolució de la geometria fins incloure la comprensió de diversos fenòmens visuals, necessitem aclarir què entenem pel processament visual necessari per a resoldre problemes matemàtics que inclouen fenòmens visuals. En el context escolar, l'augment de l'ús de paquets de geometria dinàmica ens dóna l'oportunitat de descriure com aquesta utilització inclou diversos aspectes de visualització matemàtica.

Partim de la idea que el pensament geomètric és la interacció entre representacions externes i coneixement geomètric on les imatges mentals tenen un important paper a fer. També sabem que el processament visual en matemàtiques inclou l'habilitat per manipular i transformar mentalment representacions visuals (Bishop 1993). En aquest escrit descrivim tres elements diferents del procés de visualització

i analitzem de quina manera la utilització d'un paquet de geometria dinàmica necessita alhora que contribueix al desenvolupament de la visualització en aquests tres sentits.

Visualització en geometria

Per a poder descriure aquests tres elements diferents del procés de visualització necessitem primer establir el significat del terme visualització i després considerar la naturalesa de l'entorn informàtic. Zimmermann i Cunningham (1991, p.3) argumenten que en la visualització matemàtica el major interès rau en l'habilitat de l'estudiant per a dibuixar un diagrama apropiat (amb paper i llapis, o en alguns casos, amb l'ordinador) per a representar un concepte o un problema matemàtic i per a utilitzar un diagrama per arribar a la comprensió, com una ajuda en la resolució de problemes. Malgrat això, aquesta definició passa per alt la noció de processament visual esbossada per Bishop (1993) de la que s'ha provat que és útil per a descriure els processos de resolució de problemes geomètrics (Gorgorió, pendent de publicació). Així, en el domini de la geometria, la visualització inclou tant l'habilitat per a dibuixar un diagrama apropiat com la manipulació mental d'imatges geomètriques.

A continuació necessitem tenir en compte alguns aspectes significatius del paquet integrat de geometria dinàmica. Per a l'usuari, els aspectes importants d'aquests tipus d'entorns són:

L'habilitat per a manipular directament objectes geomètrics. El dibuix de la pantalla pot ser manipulat gràcies al ratolí. Es poden 'arrossegar' els objectes i mentre dura aquesta acció les propietats que s'han utilitzat per a construir la figura es preserven.

L'habilitat per definir relacions entre els objectes i per a explorar gràficament les seves implicacions. Aquesta, possiblement, és la característica més important d'un paquet de geometria dinàmica.

En aquest punt, és important insistir en la importància de distingir entre el que Parzysz (1988) anomena dibuix i figura. Laborde (1993, p. 49) estableix clarament la diferència de la següent manera: **dibuix** fa referència a l'entitat material mentre que **figura** es refereix a un objecte teòric. En

termes d'un paquet de geometria dinàmica, un dibuix pot ser una juxtaposició d'objectes geomètrics que s'assemblen molt a la construcció que pretenim. Contràriament, una figura conté, a més, les relacions geomètriques entre els objectes que s'han utilitzat en la construcció. D'aquesta manera, la figura és invariant quan s'arrossega qualsevol dels objectes bàsics utilitzats per la seva construcció (vegi's Holz 1995).

Tenint present l'anterior discussió, podem considerar el terme visualització en tres sentits diferents: visualització simple, visualització com a lectura d'informació visual i processament visual:

La visualització simple és la que ens permet, al veure un diagrama, ser capaços d'interpretar les normes tècniques del codi utilitzat i les seves limitacions.

La visualització com a lectura d'informació visual és la que ens permet interpretar les relacions geomètriques presents en el diagrama.

El processament visual inclou l'habilitat per a manipular i transformar mentalment les representacions i la imatgeria visual.

Tenint en compte que el paquet de geometria dinàmica actua com a mediador en el procés de resolució de problemes i que, per tant, és més un context per a la resolució de problemes que una simple eina, descrivim, a continuació de quina manera la utilització d'un paquet de geometria dinàmica com el Cabri necessita la visualització espacial en els tres sentits mencionats, alhora que contribueix al seu desenvolupament.

Elements del procés de visualització

Visualització simple.

Tal com apuntàvem abans, la visualització simple és la que ens permet, al veure un diagrama, ser capaços d'interpretar-ne les normes tècniques i les limitacions. Per exemple, vàrem demanar a dos estudiants de 12 anys, H i R, que construïssin la figura que hi ha a continuació (Jones 1995).

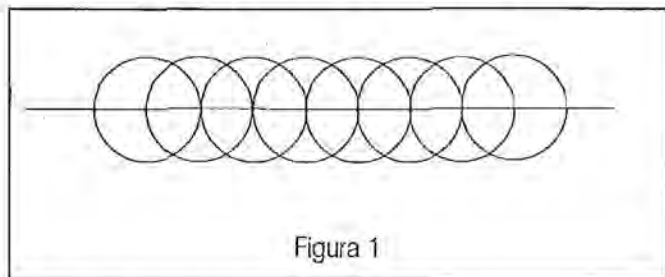


Figura 1

H i R discuteixen el model i comencen a construir-lo utilitzant cercles bàsics començant per l'esquerra. Formen tres cercles bàsics d'aproximadament la mida correcta i els arrosseguen gairebé en la direcció correcta. Això ens permet veure que els estudiants són capaços de comprendre les normes tècniques del Cabri per a produir un dibuix, però

aquest dibuix no conté encara les relacions geomètriques presents en el model. Amb els tres cercles al seu lloc, el professor convida els estudiants a arrossegar un dels cercles. Un dels estudiants exclama immediatament:

R: Clar, els pots desendreçar!

Aleshores el professor recorda als alumnes que l'activitat els demana que construeixin una figura que no es pugui 'desendreçar' (terme suggerit per Healy i alt. (1994) per a referir-se al fet que una figura pugui ser arrossegada per a veure si esdevé no recognoscible.)

Visualització com a lectura d'informació visual

Amb experiència en la utilització d'un paquet de geometria dinàmica a través d'activitats adequades i amb la intervenció del professor, els estudiants aprenen que cal interpretar les figures. Els estudiants de l'exemple anterior, després d'haver utilitzat un cercle bàsic havent-se equivocat, ho intenten a partir del centre i el radi. Comencen construint dos de tal manera que el punt que determina el radi del primer cercle és el centre del segon cercle. Això es un exemple de com H i R han començat a desenvolupar, en certa manera, la comprensió de la relació entre els objectes que han de construir.

En una sessió posterior, els mateixos estudiants estan construint el model de la figura 2. Convençuts creen dos cercles que no es 'poden desendreçar' però, més que fer servir el punt d'intersecció (en el Cabri I) fan servir el punt sobre un objecte per crear el centre del tercer cercle.

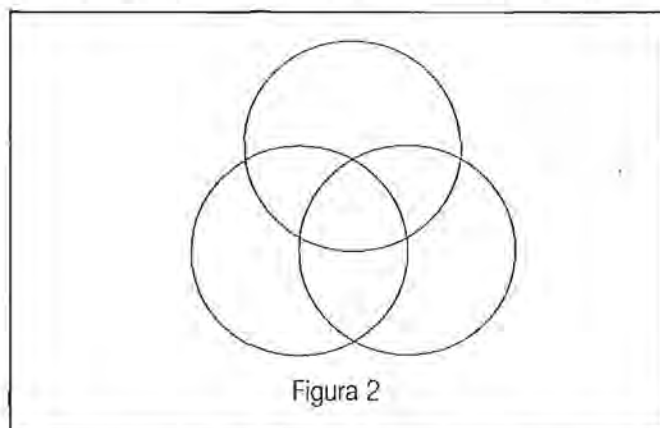


Figura 2

Com a resultat, la seva construcció final encara podria ser 'desendreçada' encara que no dràsticament. Els estudiants són conscients que alguna cosa de la seva construcció no és prou satisfactòria i, després que se 'ls recordés el que havien fet amb anterioritat, escullen correctament el punt d'intersecció i completen la figura.

Fent servir Cabri, els estudiants poden estar aplicant les idees geomètriques apropiades, però si aquestes idees no estan connectades lògicament, aleshores la figura no roman invariant quan se l'arrossega. D'aquesta manera, la uti-

lització de Cabri contribueix a connectar el que és visualment cert amb el que és correcte des del punt de vista de lògica fet que contribueix a la dialèctica entre figures i conceptes (vegi's Fischbein 1993).

Processament visual.

El processament visual inclou l'habilitat per a manipular i transformar mentalment representacions i imatgeria visual. És ben conegut que el desenvolupament d'estratègies de processament visual per part dels alumnes pot veure's afavorit per experiències apropiades de treball amb models i d'altres tipus de material en geometria (Gorgorió 1995).

El següent exemple ens mostra com el treball amb Cabri també contribueix al desenvolupament d'estratègies de processament visual. Un grup de quatre estudiants de 14 anys han construït correctament el diagrama de la figura 2. Se'ls demana aleshores que construeixin la figura 3.

Els estudiants reconeixen el triangle equilàter format en el centre del diagrama per la intersecció dels tres cercles. Saben que és un triangle equilàter perquè els costats, si els dibuixéssim, serien els radis de cercles iguals. Esborrant els cercles de la figura 2 i utilitzant les mediatrises troben el punt on es tallen els tres cercles de la figura 3. Amb això han resolt el problema. Aquest és un exemple de manipulació mental d'una representació visual.

La nostra experiència suggereix que la utilització d'un paquet de geometria dinàmica pot ser beneficiós en el desenvolupament de l'habilitat de processament visual:

- en alumnes que troben difícil manipular i transformar mentalment representacions visuals
- en situacions en les que esdevé impossible imaginar la figura
- quan per a la resolució d'un problema fan falta gran quantitat de figures.

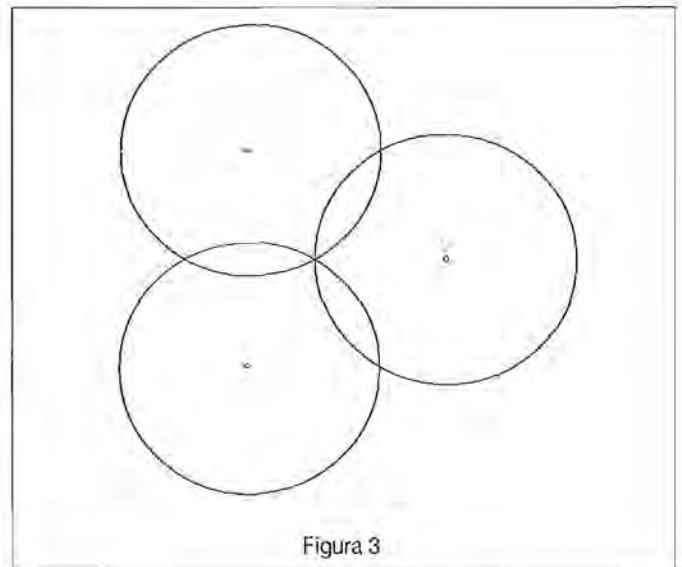


Figura 3

Hi ha el risc, és clar, que la utilització del Cabri no fomenti l'anticipació del que passarà en una construcció. Malgrat això, quan està implicat en una construcció, l'estudiant pot tenir una intuïció del que fa falta però despreciar-la abans de construir-la perquè s'adona, imaginant-la, que aquesta acció no funcionaria. És d'aquesta manera que Cabri pot contribuir al desenvolupament del processament visual.

Conclusions

Quan s'utilitza un paquet de geometria dinàmica com el Cabri, l'element que ens permet establir conjetures és essencialment visual. Cabri facilita el procés de visualització, l'establiment de conjetures i, per tant, contribueix a implementar del coneixement geomètric de l'estudiant. Donat que la geometria inclou la comprensió de fenòmens visuals, hi ha moltes geometries 'noves' que cal incloure en el currículum escolar. Tal com hem argumentat en aquest escrit, la utilització d'un paquet de geometria dinàmica pot recolzar el desenvolupament d'importants habilitats de visualització necessàries per a la comprensió de fenòmens visuals.

Fischbein, E., (1993), 'The Theory of Figural Concepts' en *Educational Studies in Mathematics*, 24 (2), pp. 139—162.

Gorgorió, N., (1995), 'Spatial processing abilities: its implications for teaching geometry' en C. Mammana (Ed), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: proceedings of the ICMI Study Conference*. Catania, Itàlia: Universitat de Catania.

Gorgorió, N., (en premsa), 'Choosing a visual strategy is not the only way of solving rotation problems'

Healy, L., Hoelzl, R., Hoyles, C. i Noss, R., (1994), 'Messing Up' en *Micromath*, 10(1), pp. 14—16.

Holz, R., (1995), 'Between Drawing and Figure' en R. Sutherland i J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with computers in Mathematics Education*. Berlin: Springer-Verlag.

Jones, K., (1995), 'Dynamic Geometry Contexts for Proof as Explanation' en C. Hoyles i L. Healy, (Eds.), *Justifying and Proving in School Mathematics*. Londres: Institute of Education, pp. 142—154.

Laborde, C., (1993), 'The Computer as part of the Learning Environment: the case of geometry' en C. Keitel i K. Ruthven (Eds.) *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*. Berlin: Springer-Verlag.

National Research Council, (1990), *Renewing US Mathematics*. Washington. National Academy Press.

Parzys, B., (1988), 'Knowing vs. Seeing: problems of the plane representation of space geometry figures' en *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), pp. 79—92.

Science and Engineering Research Council (1991), *Mathematics: strategy for the future*. Swindon: SERC.

Zimmermann, W., Cunningham, S., (1991), 'What is Mathematical Visualization?' en W. Zimmermann i S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington Mathematical Association of America.