Komatsu, K., & Jones, K. (2017). Generation of mathematical knowledge through proofs and refutations. In *Proceedings of the 50th Autumn Conference of Japan Society of Mathematical Education (JSME50)* (pp. 405–406). Aichi, Japan.

証明と論駁を通じての数学的知識の生成

小松孝太郎　　Keith Jones
信州大学　University of Southampton

１．研究の意図と目的

数理哲学者ラカトシュは，数学的探究の姿の一端として，証明と論駁の活動について描写している（Lakatos, 1976）。筆者らは，学校数学の場でこの活動を実現することを志向し，主に課題設計と教師の役割の観点から研究を行っている。

本研究では，これまで証明と論駁の活動の意味を，推測・事柄，証明，論駁という三つの要素から捉えてきた（Komatsu & Jones, in press）。しかし，ラカトシュは，これらの三要素から成る活動だけではなく，この活動を通じて数学的知識が生成される様子も描写している。学校教育でも，数学的活動を知識や技能の学習（あるいは指導）の方法として位置づけることや，より一般的には探究を通じて知識や技能を習得する活動を充実させることが求められている。

そこで本稿では，証明と論駁を通じて数学的知識を生成する活動に着目し，この活動を捉える枠組みを構築し例証することを目的とする。

２．証明と論駁を通じての数学的知識の生成

ラカトシュは，事例研究として多面体に関するデカルト・オイラー予想を選び，実際の数学史を合理的に再構成しながら，仮想の教師と生徒との対話の形式で自身の数学観を展開している。その展開を概観すると，まず多面体予想を帰納的に推測する過程は，ポリヤによる描写（Polya, 1954）に委ねられており，この予想が所与の事柄として与えられている。次に，コーシーに由来する証明が教師から示される。その後，様々な反例（証明を論駁する局所的反例と推測を論駁する大局的反例）が提起され，教師と生徒はこれらの反例に対処するために，証明を修正したり多面体予想を洗練させたりしている。

こうした活動の中で，教師と生徒は多面体の定義についても討論を行っている。例えば，教師はある反例を除外するために，一つの面を取り除いて平面上に伸ばせる多面体を単純多面体と定義し，多面体予想は単純多面体の場合についてのみ成り立つものであると制限している。ある生徒は，逆に，多面体が曲面で構成されていたとしてもコーシーの証明が成り立つことから，多面体の概念を拡張し，多面体予想がより広い範囲で成り立つことを見いだしている。ラカトシュはこうした事例研究を通じて，数学的探究の過程では証明と論駁の相互作用が見られること，そしてそうした相互作用を通じて数学的知識（この場合は多面体の意味）が作り出されていくことを主張したのである。

以上の素描をふまえて，本研究では，証明と論駁を通じて数学的知識を生成する活動を捉える枠組みとして，図１を提案する。ここで，数学的知識の種類には，定義や性質等のいわゆる内容知だけでなく，方法知も含まれている。実際，ラカトシュは連続関数の収束級数の極限に関する別の事例研究において，ザイデルが反例に対処する中で，証明生成概念としての一様収束と，推測を洗練させる方法としての補題組み込み法の二つを同時に発見したと主張している（Lakatos, 1976, p. 136）。

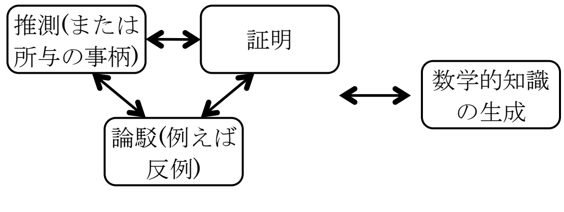


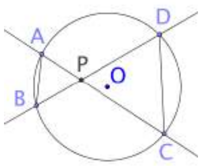
図１：証明と論駁を通じての数学的知識の生成

３．学校数学における例

本節では，図１で表される活動が学校数学の場

で実現可能であることを示すために，この活動を学校数学の題材で例証する。中学校第三学年で，円周角の定理については学習済みであるが，円に内接する四角形の性質や接弦定理は未習である状態を想定する。所与の事柄として次の課題が与えられ，この事柄を生徒が以下のように証明したとする。

［課題］図のように円 O の円周上に 4 点 A, B, C, D があります。点 A, C と点 B, D を直線で結び，その交点を点 P とします。このとき，△PAB∽△PDC であることを証明しなさい。



［証明（概略）］
∠APB＝∠DPC（対頂角）
∠PAB＝∠PDC（円周角の定理）
よって，△PAB∽△PDC

その後，点 A, B, C, D を円 O 上で色々な位置に動かしても△PAB∽△PDC は成り立つか考える機会を設定する。とりわけ動的幾何ソフトウェアを使えば様々な場合を発見することができるが，例えば図 2 左の場合に着目したとする。

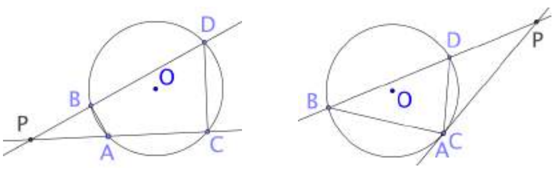


図 2 ：問題に付された図とは異なる図

このとき，図 2 左では△PAB∽△PDC が成り立たないと判断する生徒がいると予想される（事柄の論駁）。そこで上述の証明を振り返ってみると，証明で根拠として用いた対頂角の性質及び円周角の定理が，図 2 左の場合には適用できないことがわかる（証明の論駁）。だが，∠APB と∠DPC は図 2 左では共通な角であるため，∠APB＝∠DPC 自体は成り立つことがわかる。一方で，∠PAB＝∠PDC が成り立つかどうかは，既習の知識だけでは導くことができない。そこで，図 2 左における△PAB∽△PDC の真偽について判断するために，「円に内接する四角形では，一般に，一つの内角とその対角の外角は等しいのか」について追究することが考えられる。この一連の過程を通じて，数学的知識として円に内接する四角形の性質が生成されることが期待される。

また，図 2 右の場合を発見する生徒もいると予想される。これは点 A, C を限りなく近づけた場合であり，直線 AC は円の接線に近づく。円の接線は，現在の中学校数学では第一学年において，円と直線が 1 点だけ共有するときのその直線として定義されている。一方で，図 2 右の発見に伴う活動を通じて，円の接線を，円周上の 2 点を通る直線ℓについて, その 2 点を限りなく近づけたときの直線ℓとして捉え直すことが期待される。さらに，接弦定理についても，内接四角形の性質に関する前述の展開と同様の形で追究することが考えられる。これらの一連の過程を通じて，数学的知識として接線の定義や接弦定理が生成されることが期待される。

4．今後の課題

今後の課題として次の二つが挙げられる。

- 図 1 にある数学的知識の生成を，内容知だけでなく方法知の観点からも例証すること
- 本稿で例証した活動を実現するための方法を，課題設計及び教師の役割の点から検討すること

引用・参考文献

Komatsu, K., & Jones, K. (in press). Proofs and refutations in school mathematics: A task design in dynamic geometry environments. In T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the 10th Congress of European Research in Mathematics Education*. Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Polya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics: Mathematics and plausible reasoning, Vol. 1*. Princeton, NJ: Princeton University Press.