

オープンなフローチャート証明をすることの効果と限界

Effects and Limits of Open Flow-chart Proving

○宮崎 樹夫*, 松岡 樂*, 藤田 太郎**, ジョーンズ キース***

MIYAZAKI Mikio*, MATSUOKA Yasushi*, FUJITA Taro**, JONES Keith***

*信州大学, **エクセター大学, ***サザンプトン大学

*Shinshu University, **Exeter University, UK, ***Southampton University, UK

[要約]本研究はオープンな場面でフローチャート証明をすることに着目し、その特徴(証明の二層構造の視覚化、多様な証明の構成促進)に基づいて、証明の基礎的学習における効果と限界等について考察した。その結果、次のことが明らかとなった。効果として、証明の構造に関する全体的な理解を促進するとともに、その理解を伴いつつ、前提から結論に前向きに／結論から前提に後向きに推論すること及び両者による中間命題の関係網の接続を促進することが期待し得る。一方、限界として、フローチャート形式による思考の制約／クローズなパラグラフ証明への切り替えが想定される。

[キーワード]フローチャート証明、オープンな場面、

1. 証明の基礎的学習の重要性と課題

学校数学における証明の学習は、本来、子どもが数学の営みにならい自らの課題を真正に探究するものである。また、そうであるが故に、学校数学における証明の学習は、“理智の学び”として教育の内外において普遍かつ不朽の価値を有するのであり、この学びの姿を教育の営みとして実現することが強く求められるようになってきている。

証明の学習のうち、証明それ自身を対象とする学習は、証明を探究の方法とする学習に先だって位置づけられており、証明の学習全体の要としての役割を担っている。そこで、本研究では、証明を対象とする学習を「証明の基礎的学習」と呼ぶ。

証明の基礎的学習の現状には、証明の構想／構造の理解について少なくとも次の課題がある。一つは、証明を構想することについて、結論から前提に後向き／前提から結論に前向きに推論することを学習する機会が極めて乏しいことである。他の一つは、証明の構造について要素的／関係的な理解に留まっており全体的な理解(Miyazaki & Fujita, 2010)が十分図られていないことである。

これらの課題の解決には、証明の基礎的学習に適した学習活動及び学習進行 Learning progression (Empson, 2012)が必要である。本研究では、こうした学習活動及び学習進行で一定の役割が期待されるオープンな場面におけるフローチャート形式での証明(以下、「オープンなフローチャート証明」)をすることについて考察する。

2. 研究の目的

本研究の目的は次の間に答えることである。

証明の基礎的学習においてオープンなフローチャート証明をすることによって、どのような効果が期待し得るか／いかなる限界が想定されるか。

3. オープンなフローチャート証明をすることの意味と特徴

(1) オープンなフローチャート証明をすることの意味

形式的証明は、その論理学的な構造に着目すると、定理等の全称命題からなる層と、普遍例化による単称命題及び仮言三段論法による命題の連鎖からなる層から成る。この二層構造における演繹的推論の組立のみが示された流れ図を証明として完成することがフローチャート形式での証明(McMurray, 1978)することである。

これに対し、証明の結論が示されている場面で、それを導くために必要な前提や定理等の諸要素を見出すことによって、フローチャート形式での証明をすることを、本研究では「オープンなフローチャート証明をする」と呼ぶことにする。

(2) オープンなフローチャート証明をすることの特徴

① 証明の二層構造の視覚化

フローチャート形式によって、全称命題の層と単称命題の層からなる証明の二層構造が図示される。これにより証明の構想／構成に際し子どもは証明の構造の視覚的な把握が可能になる。

② 多様な証明の構成促進

オープンな場面で証明をすることにより、結論とそれを導くために必要な前提や定理等の諸要素を多様に探ることが促進される。これにより子どもは様々な証明を構成するとともに、既に構成済みの証明で用いた定理等を変えるなどして別の証明をつくりだすことが可能になる。

4. 効果、限界、更なる可能性

(1) 期待し得る効果

証明の二層構造がフローチャート形式として図示されることにより、証明の構造に関する全体的

な理解、即ち、演繹的な推論(普遍例化と仮言三段論法)のどのような組立によって前提と結論が結びつけられているかについての理解が促進される。その結果、子どもは、例えば循環論のような証明の構造全体にかかる誤りを見出し、その理由について考察できるようになると期待できる。

また、オープンな場面で多様な証明の構成が可能になることにより、証明の二層構造についての理解を伴いつつ、結論から前提に後向き／前提から結論に前向きに推論すること、及び両者による中間命題の関係網を接続することが促進される。その結果、子どもは証明を構想する活動を暗黙裏に数多く経験することができ、証明の構想の仕方について学習するための素地を豊かにすることができるようになると期待できる。

(2) 想定される限界

① フローチャート形式による思考の制約

フローチャート形式により、結論を導くための演繹的な推論の組立が図示される。これにより、子どもが証明の構成に取り組み易くなる反面、演繹的な推論の組立に関し子どもの思考が制約されてしまうという限界が伴う。例えば、実際には三角形の合同条件を用いずに二等辺三角形の性質で証明できる場合であっても、合同条件という特殊な推論の型を含むフローチャート形式が図示されることによって、演繹的な推論の組立が合同条件を用いるものに制約されてしまうことになる。

② クローズなパラグラフ証明への切り替え

証明の基礎的学習では、クローズな場面におけるパラグラム証明の構成が最終的に意図される。そのため、基礎的学習の初期にオープンなフローチャート証明の構成が扱われるとしても、いずれかの時期に、オープンな場面をクローズな場面に、フローチャート形式を通常のパラグラフ形式に切り替える必要がある。こうした場面と形式の切り替えの実現には、学習者にとって適切な学習進行が必要となる。これについては、既に三段階からなる学習進行が開発され、授業として実践されている (Miyazaki, Fujita, & Jones, 2012)。

(3) 更なる可能性

フローチャート形式で証明をすることが発展の“足場”となり、新たな性質を発見したり別の証明を見出したりする学習につながる可能性がある。例えば、ある生徒は三角形の合同条件と合同な図形の性質を用いて結論として角の相等関係を導きフローチャート証明を完成した後、この相等関係からさらに平行線と角の性質を用いて直線の平行関係を導けることに気づいた。そして、教師に対しフローチャートの図に新たな枠を付記することを提案した。

5. 結語、意義、今後の課題

本研究の結論は次の通りである。

証明の基礎的学習においてオープンなフローチャート証明をすることにより、次の効果が期待しえる: 証明の構造に関する全体的な理解を促進するとともに、その理解を伴いつつ、前提から結論に前向きに／結論から前提に後向きに推論すること及び両者による中間命題の関係網の接続を促進する。一方、限界として、フローチャート形式による思考の制約、クローズなパラグラフ証明への切り替えが想定される。

フローチャート証明に関する数多くの先行研究は何れもクローズな場面でのものである。これに対し、本研究はオープンな場面におけるフローチャート形式で証明することに焦点をあて、証明の基礎的学習での効果と限界等を明らかにしたものであり、ここに本研究の独自性がある。

今後の課題は次の通りである。

- 開発済みの学習進行による授業により証明の基礎的学習はどのように改善されるか
- 証明の基礎的学習以外でオープンなフローチャート証明をすることにより、どのような効果や限界が期待・想定されるか。

[文献]

Empson, S. B. (2011). On the idea of learning trajectories: promises and pitfalls, *The Mathematics Enthusiast*, 8(3), 571-596.

McMurray, R. (1978). Flow proofs in geometry. *Mathematics Teacher*, 71, 592-595.

Miyazaki, M., & Fujita, T. (2010). Students' understanding of the structure of proof: Why do students accept a proof with logical circularity? In Y. Shimizu, Y. Sekiguchi, and K. Hino (Eds), *Proceedings of EARCOME5* (pp. 172-179). Tokyo, Japan: EARCOME.

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2012). Introducing the structure of proof in lower secondary school geometry: a learning progression based on flow-chart proving. In (Eds), *Proceedings of ICME2012* (pp. 2858-2867). Seoul, South Korea: EARCOME.

*オープンなフローチャート証明の学習用コンテンツ(日本語/英語/中国語版)は次のサイトから利用可能である:
<http://www.schoolmath.jp/flowchart/login/index.php>

[謝辞]本研究は、科学研究費補助金【No. 22330245, 23330255, 25560075, 26282039】を受けている。