Das Adams-Riemann-Roch-Theorem in der höheren äquivarianten K-Theorie

Einleitung

Der Adams-Riemann-Roch'sche Satz steht im Zentrum des Beweises des allgemeinen Grothendieck-Riemann-Roch-Theorems nach [6], [19] bzw. [22]. Ihn für die höhere äquivariante K-Theorie zu formulieren und zu beweisen, ist der Inhalt dieser Arbeit:

Sei X ein Schema versehen mit einer Operation einer Gruppe G. Unter einem G-Modul auf X verstehen wir einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{E}$ zusammen mit in $g \in G$ funktoriellen Homomorphismen

$$g : g^*\mathcal{E} \to \mathcal{E}.$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}(G,X)$ die Kategorie der lokalfreien G-Moduln auf X und definieren für jedes $q \geq 0$ die q-te äquivariante K-Gruppe als

$$K_q(G,X) := K_q(\mathcal{P}(G,X))$$

(vgl. [14]). Wir setzen $K(G,X) := \oplus_{q\geq 0} K_q(G,X)$.

Satz: Sei $f : X \hookrightarrow Y$ eine reguläre abgeschlossene G-Immersion von G-Schemata mit Konormalengarbe $\mathcal{N}$. Dann kommutiert für jeden Adamsoperator ψ^j $(j \in \mathbb{N})$ folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} K(G,X) & \stackrel{\theta^j(\mathcal{N})\psi^j}{\longrightarrow} & K(G,X) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ K(G,Y) & \stackrel{\psi^j}{\longrightarrow} & K(G,Y); \end{array}$$

hierbei bezeichnet $\theta^j(\mathcal{N})$ die j-te kannibalistische Klasse von $\mathcal{N}$ und f_* die auf den K-Gruppen induzierte Abbildung.

Wenn G auf X und Y trivial operiert, so läßt sich die entsprechende Aussage auch allgemeiner für projektive Morphismen f von vollständigem Durchschnitt beweisen. Falls beispielsweise X eine abelsche Varietät und $\mathcal{E}$ ein lokalfreier G-Modul auf X ist, so besagt sie im Fall $q = 0$ und $j = 2$ folgende Gleichheit von virtuellen Darstellungen von G:

$$\textstyle\sum_i (-1)^i([H^i(X, \mathcal{E}\otimes\mathcal{E})] - 2[H^i(X, \Lambda^2\mathcal{E})]) =$$

$$= 2^{\dim(X)} \cdot \textstyle\sum_i (-1)^i([H^i(X,\mathcal{E}) \otimes H^i(X,\mathcal{E})] - 2[\Lambda^2 H^i(X,\mathcal{E})]).$$

Das wichtigste Ingredient des Satzes ist die bereits zur Formulierung benötigte λ-Struktur auf der äquivarianten K-Theorie.

Fundamental hierfür ist die Berechnung der äquivarianten K-Theorie des projektiven G-Faserbündels $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ zu einem lokalfreien G-Modul $\mathcal{E}$ (vom Rang $r+1$) auf einem G-Schema X (vlg. (2.3)):

$$K(G, \mathbb{P}(\mathcal{E})) \cong \oplus_{i=0}^{r} K(G, X).$$

Aus ihr ergibt sich das Zerfällungsprinzip für lokalfreie G-Moduln und folglich, daß die durch äußeres Potenzieren gegebene Prä-λ-Struktur auf $K_0(G, X)$ für jede Gruppe G in der Tat eine λ-Struktur ist (vgl. (2.5)).

Auf den höheren K-Gruppen läßt sich eine λ-Ring-Struktur definieren, falls die Gruppe G endlich und das Schema X glatt und quasiprojektiv über einer regulären, affinen Basis S ist. Dies geschieht wie folgt:

Ist zunächst $X = \mathrm{Spec}(A)$ affin, so interpretieren wir den Schleifenraum $\Omega BQ\mathcal{P}$ des klassifizierenden Raumes $BQ\mathcal{P}$ der Quillenkategorie $Q\mathcal{P}$ zur Kategorie $\mathcal{P} = \mathcal{P}(G, A)$ der projektiven G-Moduln über A als klassifizierenden Raum $B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})$ der Kategorie $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ ([7]) und konstruieren für jeden CW-Komplex Z einen natürlichen Homomorphismus

$$r(Z) : \tilde{K}_0(\pi_1(Z), \mathcal{P}) \to [Z, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*$$

von der reduzierten Grothendieckgruppe der Darstellungen der Fundamentalgruppe von Z in $\mathcal{P}$ in die Gruppe der punktierten Homotopieklassen von stetigen Abbildungen von Z nach $B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0$ (§3). Mithilfe dieser natürlichen Transformation $r(-)$ übertragen wir die λ-Struktur des λ-Ringes $K_0(\pi_1(Z) \times G, X) = K_0(\pi_1(Z), \mathcal{P})$ (vgl. (2.5)) auf die Gruppe $[Z, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*$ und damit insbesondere auf

$$K_q(G, X) = [S^q, (\Omega BQ\mathcal{P})_0]_* = [S^q, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*$$

Für beliebiges X konstruieren wir ein (absolut) affines G-Schema $\pi : W \to X$, das dieselben äquivarianten K-Gruppen wie X besitzt, und ziehen die λ-Struktur von $K(G, W)$ längs des Ringisomorphismus $\pi^* : K(G, X) \tilde{\to} K(G, W)$ auf $K(G, X)$ zurück (§4). — Zur Konstruktion von W betten wir X äquivariant und affin in ein projektives Faserbündel $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ eines lokalfreien G-Moduls $\mathcal{E}$ auf S vom Rang $r+1$ ein (vgl. (1.6)). Das Stiefelschema Stief$(\mathcal{E})$ zum Multiindex $(r, 1)$ ist dann in natürlicher Weise ein affines Schema über $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, und wir definieren W als das Faserprodukt von Stief(E) und X über $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. Die Isomorphie der induzierten Abbildung $\pi^* : K(G, X) \to K(G, W)$ ergibt sich aus einer verallgemeinerten Version des Homotopietheorems (vgl. (2.9)) und aus einer geeigneten geometrischen Interpretation des Stiefelschemas als $\mathbb{P}(\mathcal{E})$-Schema (vgl. (4.1)).

Allgemeiner als einleitend beschrieben wird in §5 der Riemann-Roch'sche Satz ohne Nenner für beliebige natürliche Operationen μ der Augmentation 0 bewiesen. Die wesentlichen Hilfsmittel hierbei sind eine äquivariante Version der Deformation ins Konormalenbündel (vgl. (1.5)) und die Schnittformel (2.8) der Exzessdimension 0.

Diese Arbeit ist Teil meiner Dissertation. Ich möchte mich recht herzlich bei Herrn Prof. Dr. Tamme bedanken für die freundliche Betreuung und die zahlreichen Anregungen, die mir insbesondere durch die Vorlesung "K-Theorie und Riemann-Roch" und die anschließenden Diplomarbeiten vermittelt wurden. Mein besonderer Dank gilt ferner Herrn Prof. Dr. Neukirch für die mir zur Verfügung gestellte Stelle als wissenschaftliche Hilfskraft. Schließlich möchte ich mich beim Referenten dieser Arbeit für etliche hilfreiche Hinweise bedanken.

§1 G–Schemata und G–Moduln

Sei G eine Gruppe.

(1.1) Sei X ein noethersches Schema versehen mit einer Operation von G (kurz: G–**Schema**). Wir bezeichenen für jedes $g \in G$ den zugehörigen Automorphismus von X wieder mit g. Unter einem G–**Modul** auf X verstehen wir einen $\mathcal{O}_X$–Modul $\mathcal{M}$ zusammen mit einem $\mathcal{O}_X$–Homomorphismus $g^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ für jedes $g \in G$ (wird wieder mit g bezeichnet) derart, da $1 = id_{\mathcal{M}}$ und für je zwei $g, h \in G$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (gh)^*\mathcal{M} & \stackrel{gh}{\to} & \mathcal{M} \\ \| & & \uparrow h \\ h^*g^*\mathcal{M} & \stackrel{h^*(g)}{\to} & h^*\mathcal{M} \end{array}$$

kommutiert. Zum Beispiel ist die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ in kanonischer Weise ein G–Modul auf X. Ein **Morphismus** $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ **von** G**–Moduln auf** X ist ein $\mathcal{O}_X$–Homomorphismus $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ derart, daß für alle $g \in G$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} g^*\mathcal{M} & \stackrel{g^*\alpha}{\to} & g^*\mathcal{N} \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ \mathcal{M} & \stackrel{\alpha}{\to} & \mathcal{N} \end{array}$$

kommutiert.

Für zwei G–Moduln $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ auf X sind offenbar auch die direkte Summe $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$, das Tensorprodukt $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, die n–te symmetrische Potenz $S^n\mathcal{M}$ und die n–te äuere Potenz $\Lambda^n\mathcal{M}$ G–Moduln auf X und erfüllen in der Kategorie $\mathcal{N}(G, X)$ der G–Moduln auf X die entsprechenden universellen Eigenschaften. Ferner bilden $\mathcal{N}(G, X)$ und die Kategorie $\mathcal{M}(G, X)$ der kohärenten G–Moduln auf X abelsche Kategorien; der Vergißfunktor

$$\mathcal{N}(G, X) \to \mathcal{N}(X) \text{ bzw. } \mathcal{M}(G, X) \to \mathcal{M}(X)$$

ist konservativ. Schließlich ist die Kategorie der lokalfreien G– Moduln auf X (lokalfrei bedeute immer auch von endlichem Rang) eine exakte Kategorie im Sinne von Quillen ([14]).

Für jeden Morphismus $f : X \to Y$ von G–Schemata definiert das direkte Bild bzw. schematheoretische Urbild zueinander adjungierte Funktoren

$$f_* : \mathcal{M}(G, X) \to \mathcal{M}(G, Y) \text{ und } f^* : \mathcal{M}(G, Y) \to \mathcal{M}(G, X);$$

insbesondere sind die Adjunktionen $\mathcal{M} \to f_*f^*\mathcal{M}$ und $f^*f_*\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ G–linear. Ein abgeschlossenes Unterschema Y eines G–Schemas X ist genau dann G–invariant, wenn die zugehörige Idealgarbe $\mathcal{I}$ ein G–Untermodul von $\mathcal{O}_X$ ist. Insbesondere ist die Konormalengarbe $\mathcal{C} := i^*(\mathcal{I})$ einer abgeschlossenen G–Immersion $i : Y \to X$ ein G–Modul auf Y.

(1.2) Symmetrisieren: Sei X ein G–Schema und $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$–Modul. Durch Vertauschen der Summanden

$$h^*(\oplus_{g \in G} g^*\mathcal{M}) = \oplus_{g \in G} h^*g^*\mathcal{M} \tilde{\to} \oplus_{g \in G}\, g^*\mathcal{M}$$

wird $\oplus_{g \in G} g^*\mathcal{M}$ zu einem G–Modul auf X. Dies gibt einen Funktor

$$\mathcal{N}(X) \to \mathcal{N}(G, X),$$

der linksadjungiert zum Vergißfunktor $\mathcal{N}(G,X) \to \mathcal{N}(X)$ ist :

$$\mathrm{Hom}_G(\oplus_{g\in G} g^*\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$$

Die kanonischen Abbildungen $\oplus g^*\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ und $\mathcal{M} \to \oplus g^*\mathcal{M}$ sind dabei die Adjunktionen. Rechtsadjungiert zum Vergißfunktor ist entsprechend

$$\mathcal{N} \to \mathcal{N}(G,X),\ \mathcal{M} \mapsto \prod_{g\in G} g_*\mathcal{M}$$

Falls G endlich ist, hat man damit zwei Paare adjungierter Funktoren sogar zwischen den Kategorien $\mathcal{M}(X)$ und $\mathcal{M}(G,X)$ der kohärenten Moduln.

Als Folgerungen erhalten wir:

(1.2.1) Notiz: $\mathcal{N}(G,X)$ besitzt genügend viele injektive Objekte und für jeden G–Morphismus $f : X \to Y$ sind die herkömmlichen höheren direkten Bilder $R^i f_*\mathcal{M}$ versehen mit den Homomorphismen

$$R^i f_*\mathcal{M} \stackrel{R^i f_*(g)}{\longrightarrow} R^i f_*(g_*\mathcal{M}) = g_*(R^i f_*\mathcal{M})$$

die Ableitungen von $f_* : \mathcal{N}(G,X) \to \mathcal{N}(G,Y)$.

Falls nämlich $\mathcal{M} \in \mathcal{N}(G,X)$ und $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{F}$ eine Einbettung in einen injektiven $\mathcal{O}_X$–Modul $\mathcal{F}$ ist, so ist der dazugehörige G–Morphismus $\mathcal{M} \hookrightarrow \prod_{g\in G} g_*\mathcal{F}$ eine G–Einbettung in ein injektives Objekt aus $\mathcal{N}(G,X)$. Die oben definierten Funktoren bilden damit offensichtilich einen universellen δ–Funktor.

(1.2.2) Notiz: Falls G endlich ist, so ist jeder quasikohärente G–Modul $\mathcal{M}$ auf X induktiver Limes seiner kohärenten G–Untermoduln.

Falls nämlich $\mathcal{N}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$–Untermodul von $\mathcal{M}$ ist, so ist Bild$(\oplus g^*\mathcal{N} \to \mathcal{M})$ ein kohärenter G–Untermodul von $\mathcal{M}$, der $\mathcal{N}$ umfaßt. Damit folgt (1.2.2) aus der entsprechenden nichtäquivarianten Aussage.

(1.3) Affine und projektive Faserbündel: Sei S ein G–Schema und $\mathcal{E}$ ein quasikohärenter G–Modul auf S. Es bezeichne $(G-\mathrm{Sch}/S)$ die Kategorie der G–Schemata über S.

Aus Funktorialitätsgründen ist das affine Faserbündel $V(\mathcal{E})$ ein Objekt der Kategorie $(G-\mathrm{Sch}/S)$. Es stellt folgenden Funktor dar:

$$\begin{array}{ccc} (G-\mathrm{Sch}/S) & \to & \mathrm{Ens} \\ T & \mapsto & \mathrm{Hom}_G(\mathcal{E}_{(T)}, \mathcal{O}_T). \end{array}$$

Ebenso ist das projektive Faserbündel $p : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to S$ ein Objekt der Kategorie $(G-\mathrm{Sch}/S)$. In natürlicher Weise ist dabei der universelle invertierbare $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$–Modul $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ ein G–Modul auf $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ derart, daß der kanonische Epimorphismus

$$p^*\mathcal{E} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$$

G–linear ist. $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ stellt folgenden Funktor dar:

$$\begin{array}{ccc} (G-\mathrm{Sch}/S) & \to & \mathrm{Ens} \\ T & \mapsto & \{\text{invertierbare } G\text{–Quotienten von } \mathcal{E}_{(T)}\} \end{array}$$

Insbesondere sind auch

$$\mathcal{E} \to p_*p^*\mathcal{E} \to p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$$

und allgemeiner

$$\mathrm{Sym}(\mathcal{E}) \to \Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \stackrel{\text{def}}{=} \oplus_{n\geq 0}\, p_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n))$$

G–Morphismen und sogar G–Isomorphismen, falls $\mathcal{E}$ lokalfrei ist. Für lokalfreies $\mathcal{E}$ (vom Rang r) folgt auch, daß die Koszulauflösung

$$O \to \Lambda^r\mathcal{E}_{(\mathbb{P})} \otimes \mathcal{O}(-r) \to \ldots \to \mathcal{E}_{(\mathbb{P})} \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to O$$

eine exakte Sequenz von G–Moduln auf $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ ist.

(1.4) Aufblasungen: Für jede abgeschlossene G–Immersion $i : Y \hookrightarrow X$ von noetherschen G-Schemata $X\,,Y$ ist die Aufblasung $\mathrm{Bl}_Y(X)$ von X längs Y ein Objekt der Kategorie $(G-\mathrm{Sch}/X)$ mit folgender "Minimaleigenschaft":

Sei $f : Z \to X$ ein G–Morphismus, so daß $f^{-1}(Y)$ ein Cartierdivisor auf Z ist. Dann gibt es genau einen G–Morphismus $f\colon Z \to \mathrm{Bl}_Y(X)$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \stackrel{f}{\to} & \mathrm{Bl}_Y(X) \\ & {\scriptstyle f} & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

kommutativ ist.

(1.5) Deformation ins Konormalenbündel: Sei $i : Y \hookrightarrow X$ eine reguläre abgeschlossene G–Immersion noetherscher G–Schemata der Kodimension d mit der lokalfreien G–Konormalengarbe $\mathcal{C}$. Dann ist der Nullschnitt $i' : Y \hookrightarrow X' := \mathbb{P}_Y(\mathcal{C} \oplus \mathcal{O}_Y)$ ebenfalls ein G–Morphismus (siehe (1.3)).
Wir wiederholen (vgl. [6]): Sei M die Aufblasung der projektiven Gerade $\mathbb{P}^1_X$ längs Y (eingebettet durch $s_\infty : Y \hookrightarrow X \hookrightarrow \mathbb{P}^1_X$) und $\varphi : M \to \mathbb{P}^1_X$ die kanonische Projektion. Dann ist φ außerhalb ∞ ein Isomorphismus, die Faser $\varphi^{-1}(\infty)$ über ∞ enthält das Schema X' und der Nullschnitt $i' : Y \hookrightarrow X'$ ist disjunkt zu $\varphi^{-1}(\infty)\backslash X'$. Durch φ wird also das Schema $X = \varphi^{-1}(0)$ "längs $\mathbb{P}^1$" in das Konormalenbündel $X' \subset \varphi^{-1}(\infty)$ deformiert.

Es ist unmittelbar aus (1.3) und (1.4) ersichtlich, daß hierbei alle Konstruktionen äquivariant druchführbar sind.

(1.6) Lemma (Quasiprojektive G–Schemata): Sei G eine endliche Gruppe, sei Y ein noethersches G–Schema und $q : X \to Y$ ein G–Morphismus von endlichem Typ. Dann gilt: Wenn q quasiprojektiv ist, so existiert eine Faktorisierung

$$q : X \stackrel{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}_Y(\mathcal{E}) \stackrel{p}{\to} Y$$

von q, wobei $\mathcal{E}$ ein kohärenter G–Modul auf Y, i eine G–Immersion und p die kanonische Projektion ist.
Fallls Y einen amplen invertierbaren Modul besitzt, so kann $\mathcal{E}$ lokalfrei gewählt werden.

Beweis(vgl. auch [4]): Sei $\mathcal{L}$ ein sehr ampler $\mathcal{O}_X-$ Modul relativ zu q. Dann ist auch $\mathcal{M} := \otimes_{g\in G} g^*\mathcal{L}$ ein sehr ampler $\mathcal{O}_X$–Modul relativ zu q und trägt offenbar eine G–Struktur. Daraus folgt: $q_*(\mathcal{M})$ ist ein quasikohärenter $G-$ Modul auf Y, die Adjunkton $q^*q_*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ist ein surjektiver G–Homomorphismus und der zugehörige Morphismus $X \hookrightarrow \mathbb{P}_Y(q_*\mathcal{M})$ ist eine $G-$ Immersion ((1.1) + (1.3) + [8] II (4.4.4)).

Wir schreiben nun $q_*\mathcal{M} = \cup_\lambda \mathcal{N}_\lambda$ mit kohärenten G–Untermoduln $\mathcal{N}_\lambda$ von $q_*\mathcal{M}$ ((1.2.2)). Dann gibt es ein λ derart, daß $q^*\mathcal{N}_\lambda \to \mathcal{M}$ surjektiv ist und daß der induzierte G–Morphismus $X \hookrightarrow \mathbb{P}_Y(\mathcal{N}_\lambda)$ eine Immersion ist ([8] II (3.8.4)). Dies zeigt die Behauptung.

Falls Y einen amplen invertierbaren Modul besitzt, so ist bekanntlich $\mathcal{N}_\lambda$ Quotient eines lokalfreien $\mathcal{O}_Y$–Moduls $\mathcal{E}$ und damit G–Quotient des lokalfreien G–Moduls $\oplus_{g\in G} g^*\mathcal{E}$ (Symmetrisieren (1.2)). Es folgt die Behauptung.

§2 Äquivariante K- und K$'$-Theorie

Sei G eine Gruppe und X ein noethersches G-Schema.

Definition: Die zu der exakten Kategorie $\mathcal{M}(G,X)$ bzw. $\mathcal{P}(G,X)$ gehörige K-Gruppe

$$K'_q(G,X) := K_q(\mathcal{M}(G,X))$$

bzw.

$$K_q(G,X) := K_q(\mathcal{P}(G,X))$$

im Sinne von [14] heißt die **q-te äquivariante K'- bzw. K-Gruppe** des G-Schemas X ($q \geq 0$).

$K'_0(G,X)$ bzw. $K_0(G,X)$ ist also (vgl. [14]) die Grothendieckgruppe von $\mathcal{M}(G,X)$ bzw. $\mathcal{P}(G,X)$. Das Tensorprodukt macht $K_0(G,X)$ zu einem kommutativen Ring mit Einselement $[\mathcal{O}_X]$ und $K_q(G,X)$ bzw. $K'_q(G,X)$ zu einem $K_0(G,X)$-Modul (vgl. [14]). Wenn man für $x,x' \in K_0(G,X)$ und $y,y' \in \oplus_{q\geq 1} K_q(G,X)$

$$(x,y)\cdot(x',y') := (xx', xy' + x'y)$$

setzt, so wird

$$K(G,X) := \oplus_{q\geq 0} K_q(G,X)$$

zu einer graduierten $K_0(G,X)$-Algebra.

$K(G,X)$ bzw. $K'(G,X)$ ist kontravariant funktoriell unter beliebigen bzw. flachen G-Morphismen.

(2.1) Satz: In den folgenden Fällen ist der Poincare-Homomorphismus

$$K(G,X) \to K'(G,X)$$

ein Isomorphismus:
a) G ist eine endliche Gruppe und X ist regulär und separiert.
b) Die Operation von G auf X faktorisiert über eine endliche Gruppe G' und X ist eine glatte, projektive Varietät über einem Körper k mit G-äquivariantem Strukturmorphismus.

Der **Beweis** ergibt sich sofort aus dem nachfolgenden Lemma. Es bezeichne $\mathcal{P}_\infty(G,X)$ die volle Unterkategorie von $\mathcal{M}(G,X)$ der Objekte $\mathcal{F} \in \mathcal{M}(G,X)$, die eine endliche $\mathcal{P}(G,X)$-Auflösung besitzen.

(2.2) Lemma: In den folgenden Fällen ist jeder kohärente G-Modul $\mathcal{F}$ auf X G-Quotient eines lokalfreien G-Moduls $\mathcal{E}$ auf X:
a) G ist eine endliche Gruppe und X besitzt einen amplen invertierbaren $\mathcal{O}_X$-Modul oder allgemeiner eine ample Familie von invertierbaren $\mathcal{O}_X$-Moduln.
b)Die Operation von G auf X faktorisiert über eine endliche Gruppe G' ($G \to G' \to \mathrm{Aut}(X)$) und X ist eine projektive Varietät über einem Körper k mit G-äquivariantem Strukturmorphismus $\pi : X \to \mathrm{Spec}(k)$.
Insbesondere ist in beiden Fällen die kanonische Abbildung

$$K(G,X) \stackrel{def}{=} K(\mathcal{P}(G,X)) \to K(\mathcal{P}_\infty(G,X))$$

ein Isomorphismus.

Beweis: zu a) (vgl. auch [21]) Bekanntlich ist der kohärente $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ Quotient eines lokalfreien $\mathcal{O}_X$- Moduls $\tilde{\mathcal{E}}$. Dann ist $\mathcal{E} := \oplus_{g\in G} g^*\tilde{\mathcal{E}}$ ein lokalfreier G-Modul auf X von endlichem Rang (vgl. Symmetrisieren (1.2)). Zu $\tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{F}$ gehört ein G-Morphismus $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ (vgl. (1.2)) und dieser ist wieder surjektiv.
zu b) (vgl. auch [4]): Sei $\mathcal{L}$ ein ampler invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist auch $\mathcal{M} := \otimes_{g\in G'} g^*\mathcal{L}$ ein ampler $\mathcal{O}_X$-Modul und $\mathcal{M}$ trägt eine G'-Struktur, also auch G-Struktur. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $\mathcal{F} \otimes \mathcal{M}^{\otimes n}$ von globalen Schnitten erzeugt wird, d. h. die Adjunktion

$$\pi^*\pi_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M}^{\otimes n}) \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{M}^{\otimes n}$$

ist ein Epimorphismus. $\pi_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M}^{\otimes n})$ ist ein endlich erzeugter (lokal)freier G-Modul auf Spec(k). Der lokalfreie G-Modul $\mathcal{E} := \pi^*\pi_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M}^{\otimes n}) \otimes \mathcal{M}^{\otimes -n}$ erfüllt also die gewünschten Eigenschaften.

Fundamental für das folgende ist die Berechnung der K- und K'-Theorie projektiver Faserbündel. Sei G eine Gruppe und $\mathcal{E}$ ein lokalfreier G-Modul vom Rang r auf dem G-Schema X und

$$p : \mathbb{P} := \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \to X$$

das zugehörige Faserbündel.

(2.3) Satz (K-Theorie projektiver Faserbündel): Die Abbildung

$$\begin{array}{rcc} \oplus_{j=0}^{r-1} K(G,X) & \to & K(G,\mathbb{P}) \\ (a_0,\ldots,a_{r-1}) & \mapsto & \sum_{j=0}^{r-1} p^*(a_j)\cdot[\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-j)] \end{array}$$

ist ein Isomorphismus.

Aufgrund von (1.3) überträgt sich der Quillensche Beweis ([14]) sofort in diese Situation (vgl. auch [21] und [2]). Mit einigen Vereinfachungen kann man ihn auch auf die K'-Theorie anwenden (vgl. auch [21]):

(2.4) Satz (K′-Theorie projektiver Faserbündel): Die Abbildung

$$\begin{array}{rcc} \oplus_{j=0}^{r-1} K'(G,X) & \to & K'(G,\mathbb{P}) \\ (a_0,\ldots,a_{r-1}) & \mapsto & \sum_{j=0}^{r-1} p^*(a_j)\cdot[\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-j)] \end{array}$$

ist ein Isomorphismus.

(2.5) Die λ-Struktur auf $\mathbf{K_0(G,X)}$: Die äußere Potenzierung lokalfreier G-Moduln auf X definiert offenbar eine Prä- λ-Struktur auf $K_0(G,X)$, d. h. man hat Abbildungen

$$\lambda^i : K_0(G,X) \to K_0(G,X), \ \ i \geq 0,$$

für die gilt ($x,y \in K_0(G,X)$):

$$\lambda^i(x+y) = \sum_{j=0}^{i} \lambda^j(x)\lambda^{i-j}(y).$$

Durch iterative Bildung von projektiven Faserbündeln erhält man aus (2.3) das **Zerfällungsprinzip** für lokalfreie G-Moduln $\mathcal{E}$ auf X, d. h.: Zu $\mathcal{E}$ gibt es einen glatten, projektiven G-Morphismus $f : X' \to X$ mit den Eigenschaften:

i) $f^* : K(G,X) \to K(G,X')$ ist injektiv
ii) $f^*[\mathcal{E}] = [\mathcal{L}_1] + \ldots + [\mathcal{L}_r]$ in $K_0(G,X')$, wobei $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_r$ invertierbare G-Moduln auf X' sind.
Es folgt, daß obige Prä-λ-Struktur auf $K_0(G,X)$ in Wahrheit eine λ-Struktur ist; d. h. für alle $x, y \in K_0(G,X)$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} \lambda^i(x \cdot y) & = & P_i(\lambda^1 x, \ldots \lambda^i x, \lambda^1 y, \ldots \lambda^i y) \\ \lambda^i \lambda^j(x) & = & P_{i,j}(\lambda^1 x, \ldots \lambda^{ij} x), \end{array}$$

wobei P_i bzw. $P_{i,j}$ das entsprechende universelle Polynom aus der Theorie der λ-Ringe ist (vgl. [6]).

(2.6) Die Abbildung f_*: In diesem Abschnitt wird für projektive Morphismen f von vollständigem Durchschnitt eine kovariante Abbildung f_* auf der äquivarianten K-Theorie definiert. Sei dazu G eine endliche Gruppe und S ein affines noethersches G-Schema.

Sei zunächst $f : X \to Y$ eine reguläre abgeschlossene G-Immersion von quasiprojektiven G-Schemata über S. Jedes $\mathcal{G} \in \mathcal{M}(G,X)$ besitzt nach (2.2) eine G-Auflösung durch Objekte aus $\mathcal{P}(G,X)$. Falls $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_\infty(G,X)$ ist, so kann diese für $\mathcal{G} := f_*(\mathcal{F})$ nach Schanuel's Lemma und [6], S.135 sogar endlich gewählt werden. Der hiernach wohldefinierte Funktor

$$f_* : \mathcal{P}_\infty(G,X) \to \mathcal{P}_\infty(G,Y)$$

ist exakt und definiert also nach (2.2) einen Homomorphismus

$$f_* : K(G,X) \to K(G,Y).$$

Wenn $f : \mathbb{P}_Y(\mathcal{E}) \to Y$ die Projektion eines projektiven G-Faserbündels zu einem lokalfreien G-Modul auf Y vom Rang r (d. h. eine sogenannte "elementare Projektion") ist, so sei die Abbildung f_* definiert als die Komposition

$$K(G, \mathbb{P}(\mathcal{E})) \overset{(2.3)}{\cong} \oplus_{j=0}^{r-1} K(G,Y) \overset{0-\text{te Projektion}}{\longrightarrow} K(G,Y)$$

Wenn $f : X \to Y$ ein projektiver G-Morphismus von vollständigem Durchschnitt von quasiprojektiven G-Schemata über S ist, so besitzt dieser nach (1.6) eine Faktorisierung

$$f = p \circ i : X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}_Y(\mathcal{E}) \overset{p}{\to} Y$$

in eine reguläre abgeschlossene Immersion i und den Strukturmorphismus p eines projektiven G-Faserbündels $\mathbb{P}_Y(\mathcal{E})$. Wir definieren $f_* : K(G,X) \to K(G,Y)$ als die Komposition $p_* \circ i_*$.

(2.7) Lemmma: a) f_* hängt nicht ab von der gewählten Faktorisierung.
b) f_* ist funktoriell für projektive G-Morphismen f von vollständigem Durchschnitt.
c) Projektionsformel: Für alle $x \in K(G,X)$ und $y \in K(G,Y)$ gilt:

$$f_*(f^*(y) \cdot x) = y \cdot f_*(x)$$

Beweis: Die Aussagen b) und c) sind offenbar richtig für reguläre G-Immersionen i und elementare G-Projektionen p und damit, falls a) gezeigt ist, auch allgemein für projektive G-Morphismen f von vollständigem Durchschnitt. Für a) kann man aufgrund von geometrischen Standardkonstruktionen (vgl. [6]) ohne Einschränkung $f = id_X$ annehmen. In diesem Fall ist dann zu zeigen:

$$p_* \circ i_*(x) = x \quad \text{für alle } x \in K(G,X).$$

Sei zuerst $x = 1 = [\mathcal{O}_X] \in K_0(G, X)$ und sei $\mathcal{E} \to \mathcal{L}$ der invertierbare G-Quotient auf X, der die Einbettung $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ definiert (siehe (1.3)). Indem man mit $\mathcal{L}^{\otimes -1}$ tensoriert, kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ trivial ist. Dann ist $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ das Nullstellenschema des regulären G-Schnitts

$$\mathcal{H} \hookrightarrow p^*\mathcal{E} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$$

von $\check{\mathcal{H}}$, wobei $\mathcal{H}$ die universelle Hyperebenengarbe auf $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ ist. Nach [6], Kap. V, Proposition 4.3 ist also $i_*(1) = \lambda_{-1}(\mathcal{H}) \overset{def}{=} \sum_i (-1)^i [\Lambda^i \mathcal{H}]$. Für die λ-Reihe $\lambda_t(\mathcal{H}) = \sum_{i \geq 0} [\Lambda^i \mathcal{H}] t^i$ gilt:

$$\begin{array}{lll} p_*(\lambda_t(\mathcal{H})) & = p_*(\lambda_t(p^*\mathcal{E}) \cdot \lambda_t(\mathcal{O}(1))^{-1}) & (\text{Def von } \mathcal{H}) \\ & = \lambda_t(\mathcal{E}) \cdot p_*(\lambda_t(\mathcal{O}(1))^{-1}) & (\text{Projektionsformel für } p) \\ & = \lambda_t(\mathcal{E}) \cdot p_*(\sum_i (-1)^i [\mathcal{O}(i)] t^i) & (\text{geom. Reihe}) \\ & = \lambda_t(\mathcal{E}) \cdot \sum_i (-1)^i [\mathrm{Sym}^i \mathcal{E}] t^i & (\text{vgl. (1.3)}) \\ & = 1 & (\text{vgl. [6], S.117}) \end{array}$$

Insbesondere ist also $p_* i_*(1) = p_*(\lambda_{-1}(\mathcal{H})) = 1$. Für beliebiges $x \in K(G, X)$ folgt daraus

$$\begin{array}{lll} p_* i_*(x) & = p_* i_*(i^* p^*(x)) & \\ & = p_*(p^*(x) \cdot i_*(1)) = x \cdot p_* i_*(1) & (\text{Proj. -- Formel}) \\ & = x & \end{array}$$

(2.8) Satz (Schnittformel der Exzessdimension 0): Sei G eine endliche Gruppe und S ein affines, noethersches G-Schema. Sei

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \overset{i_1}{\to} & X_1 \\ \psi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Y & \overset{i}{\to} & X \end{array}$$

ein kartesisches Diagramm von quasiprojektiven G-Schemata über S, wobei i, i_1, φ, ψ reguläre abgeschlossene G-Immersionen seien und die Kodimension von i gleich der von i_1 sei. Dann kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} K(G, Y_1) & \overset{(i_1)_*}{\to} & K(G, X_1) \\ \psi^* \uparrow & & \uparrow \varphi^* \\ K(G, Y) & \overset{i_*}{\to} & K(G, X) \end{array}$$

Beweis: Nach [8] II, Corollaire (1.5.2) ist die Komposition von exakten Funktoren

$$\mathcal{P}(G, Y) \overset{\psi^*}{\to} \mathcal{P}(G, Y_1) \overset{(i_1)_*}{\to} \mathcal{P}_\infty(G, X_1)$$

isomorph zum exakten Funktor

$$\mathcal{P}(G, Y) \overset{\varphi^* \circ i_*}{\to} \mathcal{P}_\infty(G, X_1).$$

Es verbleibt also zu zeigen, daß dieser auf den K-Gruppen die Komposition der Homomorphismen φ^* und i_* induziert. Wir führen dazu die volle Unterkategorie $\mathcal{T}(G, X)$ der Objekte $\mathcal{F}$

aus $\mathcal{P}_\infty(G,X)$ ein, für die $\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{O}_{X_1})=0$ für alle $i\geq 1$ ist. Die zu zeigende Aussage folgt dann anhand des kommutativen Diagramms

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{P}(G,X) & \overset{\varphi^*}{\to} & \mathcal{P}(G,X_1) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathcal{T}(G,X) & \varphi^* & \mathcal{P}_\infty(G,X_1) \\
 & i_* & \downarrow & & \\
\mathcal{P}(G,Y) & \overset{i_*}{\to} & \mathcal{P}_\infty(G,X) & &
\end{array}
$$

von exakten Funktoren aus folgenden Behauptungen:
a) Für jedes $\mathcal{F}\in\mathcal{P}(G,Y)$ ist $i_*(\mathcal{F})\in\mathcal{T}(G,X)$.
b) Für jedes $\mathcal{E}\in\mathcal{T}(G,X)$ ist $\varphi^*\mathcal{E}\in\mathcal{P}_\infty(G,X_1)$.
c) Die kanonische Abbildung

$$K(\mathcal{T}(G,X))\to K(\mathcal{P}_\infty(G,X))$$

ist ein Isomorphismus.
Für $\mathcal{F}\in\mathcal{P}(G,Y)$ gilt nach [3], VII (2.4) und (2.5):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_X}(i_*(\mathcal{F}),\mathcal{O}_{X_1}) &\cong \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y,\mathcal{O}_{X_1}) \\
&\cong \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\Lambda^i\mathcal{T}or_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y,\mathcal{O}_{X_1}) \\
&= 0 \quad \text{für } i\geq 1
\end{aligned}
$$

Also ist $i_*(\mathcal{F})\in\mathcal{T}(G,X)$, d. h. die Behauptung a) ist bewiesen. Die Behauptung b) folgt sofort aus der Definition der Kategorie $\mathcal{T}(G,X)$. Für die Behauptung c) wenden wir das Auflösungstheorem von Quillen an ([14], Corollary 3, S. 111): Dazu sind folgende Voraussetzungen zu prüfen:
i) Jedes Objekt aus $\mathcal{P}_\infty(G,X)$ ist G-Quotient eines Objekts aus $\mathcal{T}(G,X)$.
ii) Für jedes $\mathcal{F}\in\mathcal{P}_\infty(G,X)$ verschwinden die Tor-Garben $\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{O}_{X_1})$ für genügend großes i.
Diese folgen aber unmittelbar aus der Definition der Kategorie $\mathcal{P}_\infty(G,X)$.

(2.9) Satz (Homotopietheorem): Sei G eine endliche Gruppe und X ein noethersches G-Schema. Sei $0\to\mathcal{E}'\to\mathcal{E}\to\mathcal{E}''\to 0$ eine exakte Sequenz von lokalfreien G-Moduln auf X mit $\mathrm{rang}(\mathcal{E})=r+1$, $\mathrm{rang}(\mathcal{E}'')=r$. Sei

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{P}(\mathcal{E}'') & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathbb{P}(\mathcal{E}) & \overset{j}{\hookleftarrow} & U \\
 & q\searrow & \downarrow p & \swarrow\pi & \\
 & & X & &
\end{array}
$$

das zugehörige Diagramm von G-Schemata über X, wobei $U:=\mathbb{P}(\mathcal{E})\backslash\mathbb{P}(\mathcal{E}'')$ das offene Komplement sei. Dann ist

$$\pi^*: K'_q(G,X)\to K'_q(G,U)$$

ein Isomorphismus.
Insbesondere ist für jeden lokalfreien G-Modul $\mathcal{E}$ auf X

$$\pi^*: K'_q(G,X)\to K'_q(G,V(\mathcal{E}))$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Indem man obige Sequenz mit $\check{\mathcal{E}}'$ tensoriert, kann man annehmen, daß $\mathcal{E}' = \mathcal{O}_X$ trivial ist. In dieser Situation gilt dann:

$$i_* q^* = (1 - [\mathcal{O}(-1)])p^* : K'_q(G, X) \to K'_q(G, \mathbb{P}(\mathcal{E})),$$

denn: Die exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \to i_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}'')} \to 0$$

von kohärenten G-Moduln auf $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ liefert die Formel $i_*(1) = 1 - [\mathcal{O}(-1)]$ und damit:

$$i_* q^* = i_* i^* p^* = i_*(1) \cdot p^* = (1 - [\mathcal{O}(-1)]) \cdot p^*$$

Es folgt, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & K'_q(G, \mathbb{P}(\mathcal{E}'')) & \overset{i_*}{\to} & K'_q(G, \mathbb{P}(\mathcal{E})) & \overset{j^*}{\to} & K'_q(G, U) & \to & 0 \\
 & & \uparrow \sum_{n=0}^{r-1} [\mathcal{O}(-n)] q^* & & \uparrow \sum_{n=0}^{r} [\mathcal{O}(-n)] p^* & & \uparrow \pi^* & & \\
0 & \to & K'_q(G, X)^r & \to & K'_q(G, X)^{r+1} & \to & K'_q(G, X) & \to & 0 \\
 & & (a_o, \ldots, a_{r-1}) & \mapsto & (a_0, a_1 - a_0, \ldots, -a_{r-1}) & & & & \\
 & & & & (b_0, \ldots, b_r) & \mapsto & b_0 + \ldots + b_r & &
\end{array}$$

von K'-Gruppen kommutativ ist. Aufgrund der Berechnung (2.4) der K'-Theorie projektiver Faserbündel sind die beiden linken senkrechten Pfeile Isomorphismen, daher ist i_* injektiv und folglich ist aufgrund der Lokalisierungssequenz (vgl. [21]; hierbei geht die Endlichkeit von G ein) die obere Zeile exakt. Die untere Zeile ist offensichtlich exakt. Es folgt die Behauptung.

§3 Die λ-Struktur auf $\mathbf{K(G, X)}$ für affines $\mathbf{X}$

Sei G eine endliche Gruppe und Spec(A) ein affines, noethersches G-Schema, sei die Ordnung von G invertierbar in A. Wir schreiben hier einfach $\mathcal{P}$ für die Kategorie $\mathcal{P}(G, A)$ der lokalfreien G-Moduln auf Spec(A). Das Ziel dieses Paragraphen ist es, auf $K(G, A) \overset{def}{=} \oplus_{q \geq 0} K_q(G, A)$ eine λ-Ring-Struktur einzuführen. Der Grundgedanke hierbei ist die Arbeit [9].

In Verallgemeinerung zum Satz von Maschke ([20], V. G. 17, S. 173) beweist man analog, daß in der exakten Kategorie $\mathcal{P}$ jede kurze exakte Sequenz zerfällt. Nach [7] läßt sich somit der Schleifenraum $\Omega BQ\mathcal{P}$ des klassifizierenden Raumes $BQ\mathcal{P}$ der Quillenkategorie $Q\mathcal{P}$ von $\mathcal{P}$ folgendermaßen interpretieren:

Es sei $\mathcal{S}$ diejenige Unterkategorie von $\mathcal{P}$, deren Objekte die von $\mathcal{P}$ sind und deren Morphismenklasse nur aus den Isomorphismen von $\mathcal{P}$ besteht. Die Kategorie $\mathcal{S}$ zusammen mit dem Funktor

$$\oplus : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S},\ (P, Q) \mapsto P \oplus Q$$

ist dann eine sogenannte symmetrische monoidale Kategorie. Zu diesem “Monoid” $\mathcal{S}$ ist das zugehörige “Gruppoid” $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ wie folgt erklärt:

Definition der Kategorie $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$:
Objekte: Paare (P, Q) mit $P, Q \in \mathcal{S}$
Morphismen: Mor $((P_1, Q_1), (P_2, Q_2)) :=$
$\{(X, \alpha, \beta) |\ X \in \mathcal{S},\ \alpha : P_1 \oplus X \tilde{\to} P_2,\ \beta : Q_1 \oplus X \tilde{\to} Q_2\} / \sim,$

wobei zwei Tripel (X,α,β) und (X',α',β') genau dann äquivalent seien, wenn ein Isomorphimus $\gamma : X \tilde{\to} X'$ existiert derart, daß folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} P_1 \oplus X \arrow[d, "1\oplus\gamma"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ P_1 \oplus X' \arrow[r, "\alpha'"'] & P_2 \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} Q_1 \oplus X \arrow[d, "1\oplus\gamma"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ Q_1 \oplus X' \arrow[r, "\beta'"'] & Q_2 \end{tikzcd}$$

(3.1) Satz: Man hat eine natürliche Homotopieäquivalenz

$$\Omega BQ\mathcal{P} \cong B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})$$

von punktierten Räumen. Insbesondere gilt für die K-Gruppen von $\mathcal{P}$:

$$K_q(\mathcal{P}) = \pi_q(0, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}))$$

Beweis: siehe [7], S. 228.

Im folgenden wird nun, ausgehend von [18], für jeden zusammenhängenden CW-Komplex X ein natürlicher Homomorphismus

$$r(X) : \tilde{K}_0(\pi_1(X),\mathcal{P}) \to [X, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*$$

von der reduzierten Grothendieckgruppe $\tilde{K}_0(\pi_1(X),\mathcal{P})$ der Darstellungen der Fundamentalgruppe von X in $\mathcal{P}$ in die Gruppe $[X, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*$ der punktierten Homotopieklassen von stetigen Abbildungen von X nach $B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0$ konstruiert.

Für jede Gruppe H seien dazu folgende Bezeichnungen erklärt:
a) Eine **Darstellung von H in $\mathcal{P}$** ist ein Objekt $P \in \mathcal{P}$ zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\rho : H \to \mathrm{Aut}(P)$.
b) Die Grothendieckgruppe $K_0(H,\mathcal{S})$ bzw. $K_0(H,\mathcal{P})$ sei erklärt als die freie abelsche Gruppe über alle Isomorphieklassen von Darstellungen von H in $\mathcal{P}$ modulo den Relationen

$$[(P_1,\rho_1) \oplus (P_2,\rho_2)] - [(P_1,\rho_1)] - [(P_2,\rho_2)]$$

für je zwei Darstellungen $(P_1,\rho_1),(P_2,\rho_2)$ von H in $\mathcal{P}$, bzw. modulo den Relationen

$$[(P_2,\rho_2)] - [(P_1,\rho_1)] - [(P_3,\rho_3)]$$

für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to (P_1,\rho_1) \to (P_2,\rho_2) \to (P_3,\rho_3) \to 0$$

von Darstellungen von H in $\mathcal{P}$.
c) Die reduzierte Grothendieckgruppe $\tilde{K}_0(H,\mathcal{S})$ bzw. $\tilde{K}_0(H,\mathcal{P})$ sei die Faktorgruppe von $K_0(H,\mathcal{S})$ bzw. $K_0(H,\mathcal{P})$ nach der von den trivialen Darstellungen erzeugten Untergruppe $K_0(\mathcal{P})$.

Es bezeichne $B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0$ die Zusammenhangskomponente von $(0,0)$ in $B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})$. Die direkte Summe setzt sich auf $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ fort:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} \times \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} & \to & \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} \\ (P_1,Q_1),(P_2,Q_2) & \mapsto & (P_1 \oplus P_2, Q_1 \oplus Q_2) \end{array}$$

und induziert auf $B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0$ eine H-Raum-Struktur, d. h. $B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0$ wird zu einem Gruppenobjekt in der Homotopiekategorie (vgl. [7]).

Sei nun eine Darstellung $\rho : H \to \mathrm{Aut}(P)$ gegeben. Wir definieren einen Funktor N von der einpunktigen Kategorie Aut(P) nach $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ durch:

$$\begin{array}{rccc} N: & \mathrm{Aut}(P) & \to & \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} \\ & P & \mapsto & (P,P) \\ & \alpha & \mapsto & (0, id_P, \alpha) \end{array}$$

und bilden zu $\tilde{\rho} := N \circ \rho$ die stetige Abbildung

$$B(\tilde{\rho}) : BH \overset{B(\rho)}{\to} B\mathrm{Aut}(P) \overset{B(N)}{\to} B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0.$$

Dies setzt sich fort nach [18] fort zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{rccc} q_H : & \tilde{K}_0(H, \mathcal{S}) & \to & [BH, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_* \\ & \rho & \mapsto & [B(\tilde{\rho})] \end{array}$$

Falls speziell H die Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden CW-Komplexes X ist, so erhält man mithilfe des 2-coskeletons

$$X \to B\pi_1(X)$$

somit einen Gruppenhomomorphismus

$$q(X) : \tilde{K}_0(\pi_1(X), \mathcal{S}) \to [X, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*$$

funktoriell in X (und S); wir haben damit eine natürliche Transformation

$$q : \tilde{K}_0(\pi_1(-), \mathcal{S}) \to [-, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*$$

zwischen Funktoren von der Kategorie der zusammenhängenden CW-Komplexe in die Kategorie der Gruppen (oder allgemeiner der punktierten Mengen).

Wir wiederholen: Eine natürliche Transformation

$$F \to G$$

zwischen Funktoren von der punktierten Homotopiekategorie der **endlichen** zusammenhängenden CW-Komplexe in die Kategorie der punktierten Mengen heißt **universell**, falls für jeden zusammenhängenden H-Raum Z und jede natürliche Transformation $F \to [-, Z]_*$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F & \to & [-, Z]_* \\ & \searrow & \\ & & G \end{array}$$

eindeutig kommutativ ergänzt werden kann.

(3.2) Proposition: Die natürliche Transformation

$$q : \tilde{K}_0(\pi_1(-), \mathcal{S}) \to [-, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*$$

ist universell.

Beweis: siehe [18].

(3.3) Satz: Für jede Gruppe H faktorisiert die Abbildung q_H modulo $\tilde{K}_0(H,\mathcal{P})$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_0(H,\mathcal{S}) & \overset{q_H}{\to} & [BH, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_* \\ \downarrow & r_H & \\ \tilde{K}_0(H,\mathcal{P}) & & \end{array}$$

Insbesondere erhält man wie oben eine natürliche Transformation

$$r : \tilde{K}_0(\pi_1(-),\mathcal{P}) \to [-, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*$$

und diese ist wieder universell.

Beweis: Sei

$$(P.,\rho.) : 0 \to (P_1,\rho_1) \to (P_2,\rho_2) \to (P_3,\rho_3) \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Darstellungen von H in $\mathcal{P}$, d. h. eine Darstellung $\rho. : H \to \mathrm{Aut}(P.)$ von H in der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(P.)$ der zugrundeliegenden exakten Sequenz

$$P. : 0 \to P_1 \to P_2 \cong P_1 \oplus P_3 \to P_3 \to 0$$

Zu zeigen ist die Gleichung

$$[B(\tilde{\rho}_2)] = [B((\rho_1 \oplus \rho_3)\tilde{\ })] \text{ in } [BH, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*.$$

Wir definieren dazu Gruppenhomomorphismen

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathrm{Aut}(P_1) \times \mathrm{Aut}(P_3) & \to & \mathrm{Aut}(P.) \\ & (\alpha_1,\alpha_3) & \mapsto & (\alpha_1, \alpha_1 \oplus \alpha_3, \alpha_3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} j,j': & \mathrm{Aut}(P.) & \substack{\to \\ \to} & \mathrm{Aut}(P_2) \cong \mathrm{Aut}(P_1 \oplus P_3) \\ j: & (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) & \mapsto & \alpha_1 \oplus \alpha_3 \\ j': & (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) & \mapsto & \alpha_2 \end{array}$$

Dann gilt offenbar $j \circ i = j' \circ i$, $j \circ \rho. = \rho_1 \oplus \rho_3$, $j' \circ \rho. = \rho_2$. Wir fassen diese Abbildungen zusammen in dem Diagramm von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen

$$\begin{array}{ccccc} BH \overset{B\rho.}{\to} & B\mathrm{Aut}(P.) & \substack{\overset{B(j)}{\to} \\ \overset{B(j')}{\to}} B\mathrm{Aut}(P_1 \oplus P_3) \cong B\mathrm{Aut}(P_2) & \overset{B(N)}{\to} & B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0 \\ & B(i) \uparrow & & & \\ & B\mathrm{Aut}(P_1) \times B\mathrm{Aut}(P_3) & & & \end{array}$$

Nach [15], Theorem 1, S. 205 ist für die Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ die Abbildung

$$B(i)_* : H_*(B(\mathrm{Aut}(P_1) \times \mathrm{Aut}(P_3))) \to H_*(B\mathrm{Aut}(P.))$$

ein Isomorphismus, also die Abbildung

$$B(i)^* : [B\mathrm{Aut}(P.), B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_* \to [B\mathrm{Aut}(P_1) \times B\mathrm{Aut}(P_3), B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*$$

injektiv (siehe Lemma 1.2, [9], S.243).
Wegen $j \circ i = j' \circ i$ ist $[B(N) \circ B(j) \circ B(i)] = [B(N) \circ B(j') \circ B(i)]$ und also $[B(N) \circ B(j)] = [B(N) \circ B(j')]$. Daraus ergibt sich die gewünschte Gleichung

$$\begin{aligned} [B(\tilde{\rho}_2)] &= [B(N) \circ B(\rho_2)] = [B(N) \circ B(j') \circ B(\rho.)] = \\ & [B(N) \circ B(j) \circ B(\rho.)] = [B(N) \circ B(\rho_1 \oplus \rho_3)] = B((\rho_1 \oplus \rho_3)\tilde{\ }) \end{aligned}$$

Daß die entstehende natürliche Transformation $r(-)$ universell bleibt, folgt unmittelbar aus der Surjektivität von $\tilde{K}_0(H,\mathcal{S}) \to \tilde{K}_0(H,\mathcal{P})$.

(3.4) Korollar: Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist die natürliche Transformation

$$r^i : \tilde{K}_0(\pi_1(-),\mathcal{P})^i \to [-, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*^i$$

universell.

Beweis: Dies folgt aus dem folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_0(\pi_1(-),\mathcal{P})^i & \stackrel{(r_{\mathcal{P}})^i}{\longrightarrow} & [-, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*^i \\ \| & & \| \\ \tilde{K}_0(\pi_1(-),\mathcal{P}^i) & \stackrel{r_{(\mathcal{P}^i)}}{\longrightarrow} & [-, B((\mathcal{S}^i)^{-1}(\mathcal{S}^i))_0]_*, \end{array}$$

indem man die vorhergehenden Betrachtungen statt für $\mathcal{P}$ für $\mathcal{P}^i$ anwendet.

Für jede Gruppe H wird Spec(A) durch

$$H \times G \stackrel{pr}{\to} G \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Spec}(A))$$

zu einem $H \times G$-Schema. Offensichtlich ist die Kategorie der lokalfreien $H \times G$-Moduln auf Spec(A) äquivalent zur Kategorie der Darstellungen von H in $\mathcal{P}$ und folglich

$$K_0(H,\mathcal{P}) = K_0(H \times G, \mathrm{Spec}(A)).$$

Also ist nach (2.5) $K_0(H,\mathcal{P})$ ein λ-Ring. Er hat die Zerlegung

$$K_0(H,\mathcal{P}) = K_0(\mathcal{P}) \oplus \tilde{K}_0(H,\mathcal{P})$$

in den λ-Unterring $K_0(\mathcal{P})$ und das λ-Ideal $\tilde{K}_0(H,\mathcal{P})$.

Es sei nun

$$\lambda^i : [-, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_* \to [-, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*$$

die eindeutig bestimmte kommutative Ergänzung (siehe Satz (3.3)) des Diagramms

$$\begin{array}{cccc} x & \tilde{K}_0(\pi_1(-),\mathcal{P}) & \stackrel{r}{\to} & [-, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_* \\ \downarrow & \downarrow & & \\ \lambda^i(x) & \tilde{K}_0(\pi_1(-),\mathcal{P}) & \stackrel{r}{\to} & [-, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_* \end{array}$$

(3.5) Satz: Der Ring

$$K(G,A) = \oplus_{q\geq 0} K_q(G,A) = K_0(G,A) \oplus (\oplus_{q\geq 1}\, [S^q, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*)$$

(vgl. Satz (3.1)) versehen mit den Abbildungen λ^i definiert durch

$$\lambda^i(x,y) := (\lambda^i(x), \sum_{k=0}^{i-1} \lambda^k(x) \cdot \lambda^{i-k}(y))$$

ist ein in A funktorieller λ-Ring.

Beweis: Für jedes $R \in \mathcal{P}$ induziert der Funktor

$$\begin{array}{cccc} R \otimes - : & \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} & \to & \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} \\ & (P,Q) & \mapsto & (R \otimes P, R \otimes Q) \end{array}$$

eine stetige Abbildung

(*) $$[R] \otimes - : B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0 \to B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0$$

und damit insbesondere für jedes $q \geq 1$ einen Homomorphismus

$$[R] \otimes - : K_q(G, A) \to K_q(G, A)$$

(nach (3.1)). Der H-Raum $B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0$ wird überdies durch die stetigen Abbildungen (*) zu einem $K_0(\mathcal{P})$-Modul-Objekt in der punktierten Homotopiekategorie. Diese $K_0(\mathcal{P})$-Modulstruktur ist kompatibel mit der Homotopieäquivalenz $\Omega BQ\mathcal{P} \cong B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})$ (vgl. Beweis von Grayson [7]), d. h. die auf $K_q(\mathcal{P}) = K_q(G, A)$ definierte $K_0(\mathcal{P})$-Modulstruktur stimmt mit der aus §2 überein. Offenbar ist für jedes $R \in \mathcal{P}$ die natürliche Transformation

$$[R] \otimes - : [-, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_* \to [-, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*$$

die eindeutig bestimmte kommutative Ergänzung (vgl. Satz (3.3)) des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} x & & \tilde{K}_0(\pi_1(-), \mathcal{P}) & \xrightarrow{r} & [-, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_* \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ [R] \otimes x & & \tilde{K}_0(\pi_1(-), \mathcal{P}) & \xrightarrow{r} & [-, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_* \end{array}$$

Ferner sei für jeden endlichen zusammenhängenden CW-Komples X eine in X funktorielle Multiplikation auf $[X, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*$ als eindeutig bestimmte kommutative Ergänzung (siehe Korollar (3.4)) des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} (x, y) & & (\tilde{K}_0(\pi_1(-), \mathcal{P}))^2 & \xrightarrow{r^2} & ([-, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*)^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ x \cdot y & & \tilde{K}_0(\pi_1(-), \mathcal{P}) & \xrightarrow{r} & [-, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_* \end{array}$$

erklärt.

Wenn S eine Kogruppe und H eine Gruppe in der punktierten Homotopiekategorie ist, so stimmen auf $[S, H]_*$ die beiden Gruppenstrukturen überein. Folglich sind für jedes $q \geq 1$ die Multiplikation und die Abbildungen λ^i auf $K_q(\mathcal{P}) = [S^q, B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})_0]_*$ linear; für die Multiplikation bedeutet dies $f \cdot g = f \cdot 0 + 0 \cdot g$, d. h. $f \cdot g = 0$ für alle $f, g \in K_q(\mathcal{P})$.
Da somit sowohl die Ringstruktur als auch die Abbildungen λ^i auf $K(G, A)$ über obige universelle Transformation r definiert sind, ist mit $K_0(H, \mathcal{P}) = K_0(\mathcal{P}) \oplus \tilde{K}_0(H, \mathcal{P})$ auch $K(G, A)$ ein λ-Ring (vgl. [9] für eine genauere Schlußweise).

§4 Die λ-Struktur auf $\mathbf{K(G, X)}$ für quasiprojektives $\mathbf{X}$

Für jedes quasiprojektive G-Schema U konstruieren wir in diesem Paragraphen ein affines G-Schema W über U, das dieselben äquivarianten K'-Gruppen wie U besitzt. Mithilfe dieser Konstruktion definieren wir dann für glattes U eine λ-Struktur auf dem Ring $K(G, U) = \oplus_{q \geq 0} K_q(G, U)$.

Die Konstruktion von W geht im nichtäquivarianten Fall auf Jouanolou ([10]) zurück. Dem Referenten dieser Arbeit möchte ich danken für den Hinweis auf die Jouanolou-Thomason-Konstruktion ([24]), eine allgemeinere und einfachere Konstruktion, welche ebenfalls im äquivarianten Fall durchführbar ist.

Wir beginnen mit folgender Interpretation des Stiefelschemas:

Sei G eine Gruppe, S ein G-Schema und $\mathcal{E}$ ein lokalfreier G-Modul auf S vom Rang $r+1$. Aus Funktorialitätsgründen ist das Stiefelschema Stief($\mathcal{E}$) zum Multiindex $(r,1)$ ein Objekt der Kategorie $(G-\mathrm{Sch}/S)$. Es stellt folgenden Funktor dar:

$$\begin{array}{ccc} (G-\mathrm{Sch}/S) & \to & \mathrm{Ens} \\ T & \mapsto & \{(\mathcal{E}',\mathcal{E}''):\mathcal{E}',\mathcal{E}'' \text{ lokalfreie } G-\text{Untermoduln} \\ & & \text{von } \mathcal{E}_{(T)} \text{ vom Rang 1 bzw r mit } \mathcal{E}'\oplus\mathcal{E}''=\mathcal{E}_{(T)}\} \end{array}$$

Die Zuordnung

$$(\mathcal{E}'\oplus\mathcal{E}''=\mathcal{E}_{(T)})\mapsto(\mathcal{E}_{(T)}\to\mathcal{E}')$$

definiert ferner einen G-Morphismus

$$f:\mathrm{Stief}(\mathcal{E})\to\mathbb{P}(\mathcal{E})$$

ins projektive Faserbündel $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, wodurch Stief($\mathcal{E}$) auch zu einem Objekt in $(G-\mathrm{Sch}/\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ wird. Sei

$$0\to\mathcal{H}\xrightarrow{i}\mathcal{E}_{(\mathbb{P})}\xrightarrow{\varepsilon}\mathcal{O}(1)\to 0$$

die universelle exakte Sequenz auf $\mathbb{P}(\mathcal{E})$.

(4.1) Satz: Stief($\mathcal{E}$) ist als G-Schema über $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ kanonisch isomorph zum Komplement $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\check{\mathcal{E}}_{(\mathbb{P}(\mathcal{E}))})\backslash\mathbb{P}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\check{\mathcal{H}})$ der Hyperebene $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\check{\mathcal{H}})$ im projektiven Faserbündel $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\check{\mathcal{E}}_{(\mathbb{P}(\mathcal{E}))})$.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus den beiden nachfolgenden Lemmata (4.2) und (4.3).

(4.2) Lemma: Stief$(\mathcal{E})/\mathbb{P}(\mathcal{E})$ stellt folgenden Funktor dar:

$$\begin{array}{ccc} (G-\mathrm{Sch}/\mathbb{P}(\mathcal{E})) & \to & \mathrm{Ens} \\ T & \mapsto & \{\alpha\in\mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}(1)_{(T)},\mathcal{E}_{(T)}):\varepsilon_{(T)}\circ\alpha=id\} \end{array}$$

Beweis:
$\mathrm{Mor}_{G,\mathbb{P}(\mathcal{E})}(T,\mathrm{Stief}(\mathcal{E}))=$
$=\{(\mathcal{E}',\mathcal{E}''):\mathcal{E}'\subseteq\mathcal{E}_{(T)}$ vom Rang 1, $\mathcal{E}''\subseteq\mathcal{E}_{(T)}$ vom Rang r mit $\mathcal{E}_{(T)}=\mathcal{E}'\oplus\mathcal{E}''$ und $\mathcal{E}'$ ismorph zu $\mathcal{O}(1)_{(T)}$ als $G-$ Quotient von $\mathcal{E}_{(T)}\}$
$=\{\alpha\in\mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}(1)_{(T)},\mathcal{E}_{(T)}):\varepsilon_{(T)}\circ\alpha=id\}$

(4.3) Lemma: Sei $0\to\mathcal{E}'\xrightarrow{i}\mathcal{E}\xrightarrow{\varepsilon}\mathcal{E}''\to 0$ eine exakte Sequenz von lokalfreien G-Moduln auf dem G-Schema S mit $\mathrm{rang}\,(\mathcal{E})=r+1$, $\mathrm{rang}\,(\mathcal{E}'')=r$ und $\mathrm{rang}\,(\mathcal{E}')=1$. Dann stellt das offene Komplement $U:=\mathbb{P}(\mathcal{E})\backslash\mathbb{P}(\mathcal{E}'')$ folgenden Funktor dar:

$$\begin{array}{cccc} F: & (G-\mathrm{Sch}/S) & \to & \mathrm{Ens} \\ & T & \mapsto & \{\alpha\in\mathrm{Hom}_G(\mathcal{E}_{(T)},\mathcal{E}'_{(T)}):\alpha\circ i_{(T)}=id\} \end{array}$$

Beweis: Aus Funktorialitätsgründen genügt es, den nichtäquivarianten Fall zu beweisen:
Man hat einen Morphismus von Funktoren

$$\begin{array}{cccc} j: & F & \to & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \\ & F(T)\ni\alpha & \mapsto & (\mathcal{E}_{(T)}\xrightarrow{\alpha}\mathcal{E}'_{(T)})\in\mathrm{Mor}_S(T,\mathbb{P}(\mathcal{E})) \end{array}$$

Es ist $j(T)$ injektiv für alle $T\in(\mathrm{Sch}/S)$. Wenn man daher für alle $T\in(\mathrm{Sch}/S)$ die Gleichung

$$\mathrm{Bild}(j(T))=\mathrm{Mor}_S(T,U)$$

zeigt, so folgt die Behauptung.
Da F eine Garbe auf dem großen Zariski-Situs von S ist, kann man dazu ohne Einschränkung annehmen, daß eine Spaltung $\alpha_0 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ existiert und $\mathcal{E}' = \mathcal{O}_S$ trivial ist. Nach [8] II (8.4.2) ist U dann kanonisch isomorph zu $V(\mathcal{E}'')$. Als Morphismus von Funktoren ist dabei die Einbettung $V(\mathcal{E}'') \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathcal{E}''_{(T)}, \mathcal{O}_T) & \to & \{\text{invertierbare Quotienten von } \mathcal{E}_{(T)}\} \\ \beta & \mapsto & (\mathcal{E}_{(T)} = \mathcal{O}_T \oplus \mathrm{Kern}(\alpha_0)_{(T)} \xrightarrow{id \oplus \beta \circ \varepsilon} \mathcal{O}_T) \end{array}$$

Die zu beweisende Gleichung folgt nun aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Mor}(T, U) & & \\ & & \| & & \\ & & \mathrm{Mor}(T, V(\mathcal{E}'')) & \searrow & \\ & & \| & & \\ \beta & & \mathrm{Mor}(\mathcal{E}''_{(T)}, \mathcal{O}_T) & \underset{j(T)}{\to} & \mathrm{Mor}(T, \mathbb{P}(\mathcal{E})) \\ \downarrow & & \downarrow \wr & & \\ (\alpha_0)_T \oplus \beta \circ \varepsilon & & F(T) & & \end{array}$$

(4.4) Satz: Sei G eine endliche Gruppe und S ein affines noethersches G-Schema. Ist $U \to S$ ein quasiprojektives G-Schema über S, so gibt es einen G-Morphismus $\pi : W \to U$ von G-Schemata über S mit den Eigenschaften:
(1) W ist (absolut) affin.
(2) π ist glatt und affin.
(3) Für alle G-Schemata V über U von endlichem Typ ist

$$\pi^* : K'_q(G, V) \xrightarrow{\sim} K'_q(G, W \times_U V)$$

ein Isomorphismus (für alle $q \geq 0$).

Beweis: Nach Lemma (1.6) gibt es eine Faktorisierung

$$U \xrightarrow{k'} \mathbb{P}_S(\mathcal{E}') \xrightarrow{p'} S$$

von $U \to S$, wobei $\mathcal{E}'$ ein lokalfreier G-Modul auf S, k' eine (lokalabgeschlossene) G-Immersion und p' die kanonische Projektion ist. Der Kern $\mathcal{I}$ des zu k' gehörigen G-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')} \to k'_* \mathcal{O}_U$$

ist ein quasikohärenter G-Untermodul von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')}$. Das zugehörige abgeschlossene Unterschema $X := V(\mathcal{I})$ trägt dann eine mit $\mathbb{P}(\mathcal{E}')$ kompatible G-Struktur und es ist U in X als offenes G-Unterschema enthalten, d. h. k' läßt sich weiter faktorisieren in eine offene G-Immersion j' und eine abgeschlossene G-Immersion i':

$$k' : U \xrightarrow{j'} X \xhookrightarrow{i'} \mathbb{P}_S(\mathcal{E}')$$

Wählt man auf dem Komplement $Y := X \backslash U$ die reduzierte Schemastruktur, so ist Y ein abgeschlossenes G-Unterschema von X und die Aufblasung $\tilde{X} := \mathrm{Bl}_Y(X)$ ist ein projektives G-Schema über S (siehe (1.4)). Wiederum nach Lemma (1.6) gibt es eine Faktorisierung

$$\tilde{X} \xrightarrow{i} \mathbb{P}_S(\mathcal{E}) \xrightarrow{p} S$$

von $\tilde{X} \to S$, wobei $\mathcal{E}$ ein lokalfreier G-Modul auf S vom Rang $r+1$, i eine jetzt abgeschlossene G-Immersion und p die kanonische Projektion ist.
$\tilde{X} \backslash U$ ist ein Cartierdivisor auf $\tilde{X}$ und man erhält insgesamt eine **affine** G-Einbettung

$$U \hookrightarrow \tilde{X} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}_S(\mathcal{E}) =: \mathbb{P}$$

von G-Schemata über S. Dualisieren der universellen exakten Sequenz auf $\mathbb{P}$ liefert die exakte Sequenz

(*) $$0 \to \mathcal{O}(-1) \to p^*\check{\mathcal{E}} \to \check{\mathcal{H}} \to 0$$

von lokalfreien G-Moduln auf $\mathbb{P}$. Nach Satz (4.1) ist das offene Komplement

$$\mathbb{P}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(p^*\check{\mathcal{E}}) \backslash \mathbb{P}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\check{\mathcal{H}})$$

dann das Stiefelschema Stief$(\mathcal{E})$ zum Multiindex $(r, 1)$ über S. Wir definieren nun

$$\pi : W := \mathrm{Stief}(\mathcal{E}) \times_{\mathbb{P}} U \to U$$

als die kanonische Projektion. Dann erfüllt π die Eigenschaften (1) bis (3) aus (4.4), denn:
Mit $U \to \mathbb{P}$ ist auch $W \to \mathrm{Stief}(\mathcal{E})$ affin; insbesondere ist W (absolut) affin, da Stief$(\mathcal{E})$ affin über S ist. Ferner ist mit Stief$(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}(\mathcal{E})$ auch $\pi : W \to U$ glatt und affin. Ist weiter V ein G-Schema über U, so erhält man durch Zurückziehen von (*) auf V die exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}(-1)_{(V)} \to (p^*\check{\mathcal{E}})_{(V)} \to \check{\mathcal{H}}_{(V)} \to 0$$

auf V, und dann ist $W \times_U V$ das G-Schema $\mathbb{P}_V(p^*\check{\mathcal{E}}_{(V)}) \backslash \mathbb{P}_V(\check{\mathcal{H}}_{(V)})$ (Basiswechsel). Das Homotopietheorem (2.9) liefert nun die Eigenschaft (3).

Sei nun G eine endliche Gruppe, S ein affines, reguläres G-Schema und die Ordnung von G invertierbar auf S. Sei

$$U \to S$$

ein **glattes**, quasiprojektives G-Schema über S. Zu diesem wählen wir einen G-Morphismus $\pi : W \to U$ über S wie in Satz (4.4). Dann ist

$$K(G, W) = \oplus_{q \geq 0} K_q(G, W)$$

ein λ-Ring (Satz (3.5)) und die Abbildung

$$\pi^* : K(G, U) \tilde{\to} K(G, W)$$

ein Ringisomorphismus; man beachte hierbei, daß wegen der Regularität von U die K- und K'-Theorie übereinstimmen (Satz (2.1)). Wir definieren nun eine λ-Struktur auf $K(G, U)$ durch Zurückziehen längs des Ringisomorphismus π^*.

(4.5) Lemma: Diese hängt nicht ab von dem gewählten Morphismus $\pi : W \to U$ mit den Eigenschaften (1) bis (3).

Beweis: Sei $\pi' : W' \to U$ ein weiterer solcher Morphismus. Wir bilden das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W'' & \overset{p'}{\to} & W \\ p \downarrow & & \downarrow \pi \\ W' & \overset{\pi'}{\to} & U \end{array}$$

Da p und W' affin sind, ist auch W'' affin. Da die λ-Struktur nach Satz (3.5) für affine G-Schemata funktoriell ist, sind $p'^* : K(G,W) \to K(G,W'')$ und $p^* : K(G,W') \to K(G,W'')$ λ-Homomorphismen und wegen der Eigenschaft (3) sogar λ-Isomorphismen. Daraus folgt die Behauptung.

(4.6) Lemma (Funktorialität): Sei $f : U' \to U$ ein G-Morphismus von glatten, quasiprojektiven G-Schemata U, U' über S. Dann ist

$$f^* : K(G,U) \to K(G,U')$$

ein λ-Ringhomomorphismus.

Beweis: Seien $\pi : W \to U$ und $\pi' : W' \to U'$ wie in Satz (4.4) gewählt. Wir bilden das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W \times_U W' & \overset{g}{\to} & W \\ \downarrow p & & \downarrow \pi \\ W' & \overset{\pi'}{\to} U' \overset{f}{\to} & U \end{array}$$

Da π und W' affin sind, ist auch $W \times_U W'$ affin, also ist wegen der Funktorialität für affine G-Schemata (Satz (3.5)) $g^* : K(G,W) \to K(G, W \times_U W')$ ein λ-Homomorphismus. Ferner ist $p^* : K(G,W') \to K(G, W \times_U W')$ nach (3) ein λ-Isomorphismus. Damit ist auch f^* ein λ-Homomorphismus.

§5 Der äquivariante Adams-Riemann-Roch'sche Satz

Wir wiederholen aus der Theorie der λ-Ringe (vgl. [6], [19] und [23]):

Eine natürliche Operation μ der Augmentation 0 auf der Kategorie der λ-Ringe ist ein Endomorphismus des Vergißfunktors $(\lambda\text{−Ringe}) \to (\text{punktierte Mengen})$. Als wichtigstes Beispiel haben wir die Adamsoperationen $\psi^j, j \geq 1$, im Auge; sie sind definiert durch die Rekursionsformel

$$\frac{d}{dt} \log \lambda_t = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \psi^j t^{j-1}.$$

Sei ferner K ein λ-Ring, $\mathcal{N} \in K$ von endlichem λ-Grad und $x \in K$ beliebig. Dann gibt es ein in $(K, \mathcal{N}, x)$ funktorielles Element $\mu(\mathcal{N}, x) \in K$ mit der Eigenschaft:

$$\mu(x \cdot \lambda_{-1}(\mathcal{N})) = \mu(\mathcal{N}, x) \cdot \lambda_{-1}(\mathcal{N})$$

$\mu(\mathcal{N}, x)$ ist ein universelles Polynom in $\lambda^1 \mathcal{N}, \lambda^2 \mathcal{N}, \ldots$ und $\lambda^1 x, \lambda^2 x, \ldots$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$, eindeutig bestimmt durch μ. Die kannibalistischen Bottschen Klassen $\theta^j(\mathcal{N})$ sind definiert als $\psi^j(\mathcal{N}, 1)$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Es gilt: $\psi^j(\mathcal{N}, x) = \theta^j(\mathcal{N}) \cdot \psi^j(x)$.

Sei nun G eine endliche Gruppe, S ein affines, reguläres G-Schema und die Ordnung von G invertierbar auf S. Es bezeichne $\mathcal{C}$ die Unterkategorie von $(G - \mathrm{Sch}/S)$ bestehend aus den glatten, quasiprojektiven G-Schemata über S zusammen mit den projektiven G-Morphismen über S (von vollständigem Durchschnitt).

Nach §4 ist für jedes $X \in \mathcal{C}$ der Ring $K(G,X) = \sum_{q \geq 0} K_q(G,X)$ ein λ-Ring, kontravariant und kovariant (nach §2) für beliebige Morphismen in $\mathcal{C}$; in der Sprechweise von [6] haben wir somit einen λ-Ring-Funktor

$$\begin{array}{rccc} K(G,-): & \mathcal{C} & \to & (\lambda\text{−Ringe}) \\ & X & \mapsto & K(G,X) \end{array}$$

(5.1) Satz (Riemann-Roch'scher Satz ohne Nenner in der höheren äquivarianten K-Theorie): Sei $i : X \hookrightarrow Y$ eine reguläre Einbettung in $\mathcal{C}$ mit der G-Konormalengarbe $\mathcal{N}$. Dann kommutiert für jede natürliche Operation μ der Augmentation 0 das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K(G,X) & \stackrel{\mu(\mathcal{N},-)}{\longrightarrow} & K(G,X) \\ \downarrow i_* & & \downarrow i_* \\ K(G,Y) & \stackrel{\mu}{\longrightarrow} & K(G,Y) \end{array}$$

(5.2) Korollar (Adams-Riemann-Roch'scher Satz für reguläre Einbettungen): Für jedes $j \geq 1$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K(G,X) & \stackrel{\theta^j(\mathcal{N})\cdot\psi^j}{\longrightarrow} & K(G,X) \\ \downarrow i_* & & \downarrow i_* \\ K(G,Y) & \stackrel{\psi^j}{\longrightarrow} & K(G,Y) \end{array}$$

Zum Beweis von Satz (5.1) verallgemeinere man die Schlußweisen aus [6] auf naheliegende Weise (siehe insbesondere [6], Kap. V, Beweis von Theorem 6.3). Die wesentlichen Hilfsmittel hierbei sind die äquivariante Version (1.5) der Deformation ins Konormalenbündel und die Schnittformel (2.8) der Exzessdimension 0 für die höhere äquivariante K-Theorie.

Seien nun $X, Y \in \mathcal{C}$ mit trivialer G-Operation und sei $f : X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Es bezeichne $T_f \in K_0(X) \subseteq K_0(G,X)$ das Tangentialelement von f (vgl. [6], S. 144). Dann ist die kannibalistische Bottsche Klasse $\theta^j(\check{T}_f)$ des Duals von T_f invertierbar in $K_0(X)[j^{-1}]$ und damit auch in $K_0(G,X)[j^{-1}]$ (siehe Theorem 3.2, [6], S. 38).

(5.3) Satz (Adams-Riemann-Roch'scher Satz in der höheren äquivarianten K-Theorie): Für jede natürliche Zahl j kommutiert das Diagramm von K-Gruppen:

$$\begin{array}{ccc} K(G,X) & \stackrel{\theta^j(\check{T}_f)^{-1}\cdot\psi^j}{\longrightarrow} & K(G,X)[j^{-1}] \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ K(G,Y) & \stackrel{\psi^j}{\longrightarrow} & K(G,Y)[j^{-1}] \end{array}$$

Beweis: Wir faktorisieren $f : X \to Y$ in eine reguläre abgeschlossene Immersion i und die Projektion p eines projektiven Faserbündels $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ über Y:

$$X \stackrel{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(\mathcal{E}) \stackrel{p}{\to} Y$$

Wegen der Kompositionsformel für Tangentialelemente (vgl. [6], Proposition 7.1 ii, S.145) genügt es, den Satz für i und für p zu beweisen. Für i ist er bereits in (5.1) bewiesen. Für p ergibt sich die Behauptung wie folgt: Da $K(G, \mathbb{P}(\mathcal{E}))$ frei über $K(G,Y)$ mit der Basis $1, [\mathcal{O}(-1)], \ldots, [\mathcal{O}(-d+1)]$ ist (siehe Satz (2.3)) und p_* linear über $K(G,Y)$ ist, genügt es, die zu beweisende Formel

$$p_*(\theta^j(\check{T}_p)^{-1}\psi^j(-)) = \psi^j p_*(-)$$

für diese Basiselemente nachzuprüfen. Diese ist aber dann eine Gleichung im λ-Unterring $K_0(Y)[j^{-1}]$ und bewiesen in [6], Theorem 3.2, S. 38.

Bemerkung: Für jedes zusammenhängende G-Schema X liefert die Rangabbildung $K_0(G,X) \to \mathbb{Z}$ eine kanonische Augmentation. Jedoch ist die zugehörige Grothendieckfiltrierung im allgemeinen nicht lokal nilpotent. Wenn beispielsweise $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $X = \mathrm{Spec}(k)$

(k ein Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik) mit trivialer G-Operation ist, so ist $K_0(G,X) \cong \mathbb{Z}[T]/(T^2-1)$, wobei T der Klasse des eindimensionalen k-Vektorraums mit nichttrivialer Operation von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ entspricht. Das Element $T-1$ des zugehörigen Augmentationsideals ist dann nicht nilpotent.
Wenn $f : X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$ zwischen beliebigen Objekten X und Y in $\mathcal{C}$ ist, so ist das zugehörige Tangentialelement T_f ein Element von $K_0(G,X)$. Wegen fehlender Nilpotenzaussagen für $K_0(G,X)$ ist jedoch nicht ersichtlich, ob die die kannibalistische Klasse $\theta^j(\check{T}_f)$ in $K_0(G,X)[j^{-1}]$ invertierbar ist, geschweige denn, ob die Adams-Riemann-Roch-Formel auch in diesem Fall gültig ist (vgl. [6]).

Auf $K_0(G,X)$ hat man nach (2.5) allgemeiner für jede beliebige Gruppe G eine λ-Struktur. Wenn man sich auf projektive G-Varietäten X über einem festen Körper k mit äquivariantem Strukturmorphismus beschränkt, auf denen die Operation von G über eine feste endliche Gruppe G' faktorisiert $(G \to G' \to \mathrm{Aut}(X))$, so läßt sich aufgrund von Lemma (2.2)b) die Abbildung

$$f_* : K_0(G,X) \to K_0(G,Y)$$

für beliebige projektive G'-Morphismen $f : X \to Y$ von vollständigem Durchschnitt definieren (vgl. (2.6)). Mit denselben Schlußweisen erhält man (jetzt nur für K_0):

(5.4) Satz (Äquivarianter Adams-Riemann-Rochscher Satz):
a) Wenn f eine reguläre abgeschlossene Immersion mit der Konormalengarbe $\mathcal{N}$ ist, dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K_0(G,X) & \stackrel{\theta^j(\mathcal{N})\cdot\psi^j}{\longrightarrow} & K_0(G,X) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ K_0(G,Y) & \stackrel{\psi^j}{\longrightarrow} & K_0(G,Y) \end{array}$$

b) Wenn G auf X und Y trivial operiert, dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K_0(G,X) & \stackrel{\theta^j(\check{T}_f)^{-1}\cdot\psi^j}{\longrightarrow} & K_0(G,X)[j^{-1}] \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ K_0(G,Y) & \stackrel{\psi^j}{\longrightarrow} & K_0(G,Y)[j^{-1}] \end{array}$$

(5.5) Beispiel: Sei k ein Körper und

$$f : X \to \mathrm{Spec}(k)$$

eine abelsche Varietät der Dimension d. Dann ist bekanntlich $\Omega^1_{X/k} \cong \mathcal{O}_X^d$, also $T_f = d$ in $K_0(X)$ und damit $\theta^j(\check{T}_f) = j^d$.
Für jede Gruppe G und jeden lokalfreien G-Modul $\mathcal{E}$ auf X sei $[H^i(X,\mathcal{E})] \in K_0(G,k)$ die Darstellung von G auf der i-ten Kohomologiegruppe $H^i(X,\mathcal{E})$ und

$$\chi(\mathcal{E}) := \sum_i (-1)^i [H^i(X,\mathcal{E})] \in K_0(G,k)$$

die alternierende Summe der Darstellungen $[H^i(X,\mathcal{E})]$. Dann gilt

$$\chi(\psi^j[\mathcal{E}]) = j^d \cdot \psi^j \chi(\mathcal{E}).$$

Speziell erhält man:
a) Wenn $\mathcal{E} = \mathcal{L}$ invertierbar ist, dann gilt für alle $j \geq 0$:

$$\chi(\mathcal{L}^{\otimes j}) = j^d \cdot \psi^j \chi(\mathcal{L}).$$

b) Wenn $\mathcal{E}$ beliebig ist, dann gilt z. B. für $\psi^2 = \lambda^1 \cdot \lambda^1 - 2\lambda^2$

$$\chi(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) - 2\chi(\Lambda^2 \mathcal{E}) = 2^d \psi^2 \chi(\mathcal{E})$$

$$\stackrel{def}{=} 2^d \sum_i (-1)^i ([H^i(X, \mathcal{E})] \otimes [H^i(X, \mathcal{E})] - 2[\Lambda^2 H^i(X, \mathcal{E})]).$$

Literatur

[1] *Baum, P., Fulton, W.* und *Mac Pherson, R.*, Riemann-Roch for singular varieties, Publ. Math. IHES 45 (1975), 101-145.

[2] *Baum, P., Fulton, W.* und *Quart, G.*, Lefschetz-Riemann-Roch for singular varieties, Acta Math. 143 (1979), 193-211.

[3] *Berthelot, P., Grothendieck, A.* und *Illusie, L.,* Théorie des intersections et Théorème de Riemann-Roch, LNM 225, Springer-Verlag (1971).

[4] *Donovan, P.*, The Lefschetz-Riemann-Roch formula, Bull. Soc. Math. France 97 (1969), 257-273.

[5] *Fulton, W.*, Intersection Theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 2, Springer-Verlag (1984).

[6] *Fulton, W.* und *Lang, S.*, Riemann-Roch-Algebra, Grundlehren der math. Wissenschaften 277, Springer-Verlag (1985).

[7] *Grayson, D.*, Higher algebraic K-theory: II (after D. Quillen), in Algebraic K-Theory, Evanston 1976, LNM 551, Springer-Verlag (1976), 217-240.

[8] *Grothendieck, A.* und *Dieudonné, J.*, Eléments de Géométrie Algébrique I, Grundlehren der Math. Wissenschaften 166, Springer-Verlag (1971); II, III, Publ. Math. IHES 8, 11, 17.

[9] *Hiller, H. L.*, λ-Rings and algebraic K-theory, Journal of Pure and Applied Algebra 20 (1981), 241-266.

[10] *Jouanolou, J.-P.*, Une suite exacte de Mayer-Vietoris en K-théorie algébrique, in Algebraic K-Theory I, LNM 341, Springer-Verlag (1973), 293-316.

[11] *Köck, B.*, Das Lefschetz- und Riemmann-Roch-Theorem in der höheren äquivarianten K-Theorie, Dissertation (1990, Regensburg).

[12] *Kratzer, Ch.*, Opérations d'Adams et Représentations de Groupes, l'Enseign Mathém. 26 (1980), 141-154.

[13] *Nielsen, H.*, Diagonalizably linearized coherent sheaves, Bull. Soc. Math. France 102 (1974), 85-87.

[14] *Quillen, D.*, Higher algebraic K-theory I, in Algebraic K-Theory I, LNM 341, Springer-Verlag (1973), 85-147.

[15] *Quillen, D.*, Characteristic classes of representations, in Algebraic K-Theory, Evanston 1976, LNM 551, Springer-Verlag (1976), 189-216.

[16] *Rauch, B.*, Die λ-Struktur in der höheren K-Theorie der Schemata, Diplomarbeit (1989, Regensburg).

[17] *Schäbel, G.,* Der Satz von Grothendieck-Riemann-Roch in der höheren K-Theorie, Diplomarbeit (1989, Regensburg).

[18] *Sherman, C.,* Group representations and algebraic K-thory: II, (to appear in Proc. of US-Italy K-theory conference, in Contemp. Math., AMS).

[19] *Soulé, C.,* Opérations en K-Théorie algébrique, Can. J. Math. Vol. XXXVII, No. 3 (1985), 488-550.

[20] *Scheja, G.* und *Storch, U.,* Lehrbuch der Algebra, Teil 3, Teubner-Verlag (1981).

[21] *Thomason, R. W.,* Algebraic K-theory of group scheme actions, in Algebraic Topology and Algebraic K-Theory, hrsg. v. William Browder, Annals of Math. Studies 113, Princeton University Press (1987), 539-563.

[22] *Tamme, G.,* The theorem of Riemann-Roch, in Beilinson's conjectures on special values of L-functions, hrsg. v. Michael Rapoport und Peter Schneider, Academic Press (1988).

[23] *Tamme, G.,* K-Theorie und Riemann-Roch, Vorlesung (1986/87, Regensburg).

[24] *Weibel, C.,* Homotopy Algebraic K-Theory, in Algebraic K-Theory and Algebraic Number Theory, Honolulu 1987, AMS Contempary Math. series, vol. 83

Bernhard Köck
Mathematisches Institut II
der Universität Karlsruhe
Englerstraße 2

7500 Karlsruhe 1